ملزمة الاحصاء للإدارة

جامعة الدمام – تعليم عن بعد
ادارة اعمال المستوى الثالث
دفعة ١٤٣٤ ــ ١٤٣٥ هـ

الدكتور : د. رائد الخصاونة
الايميل : ralkhasawneh@ud.edu.sa
تلخيص الطالبة : امجاد الغامدي
تجميع وتدقيق وتصحيح : امجاد الغامدي

يَا ربَ أنزِل دِفئ رَحمتَك علَى إخواننَا فِي سُوريَا

المحاضرة الأولى

المحاضرة الاولى : مقدمة + نظرية الاحتمالات

الاحصاء الاستنتاجي مقدمه:

يقسم علم الاحصاء بشكل عام الى قسمين

١- **الاحصاء الوصفي :** وهو ذلك العلم الذي يعنى بجمع البيانات وتنظيمها وتصنيفها وعرضها عن طريق جداول او رسوم بيانيه .

٢- **الاحصاء الاستنتاجي :** وهو العلم الذي يعنى بتحليل البيانات للتوصل الى تنبؤ او الاستقراء واتخاذ القرارات .

علاقة علم الاحصاء بمجموعة العلوم الادارية ؟ يرتبط علم الاحصاء ارتباطا قويا بمجموعة العلوم الإدارية وذلك على اساس ان وظائف علوم الإدارة تستند في القيام بها بطريقة موضوعيه على العديد من الطرق والنظريات الإحصائية .

* فاتخاذ القرار ضروري وهام في علم الإدارة ويجب ان يؤخذ على اساس علمي غير متحيز حيث تقدم لنا نظرية الاحتمالات والتوقع الرياضي الاساس القياسي لهذا القرار كما ان عمليات الشراء او البيع وادارة الانتاج الصناعي وسياسات التسويق وغيرها الكثير يحتاج من المختصين الالمام بالطرق الإحصائية من تفسيرات وتحديدا للعلاقات بين متغيرات هذه العلوم وقدرة كبيرة على وضع الفروض واختبارها والتأكد من مدى صحتها

الفصل الاول: نظرية الاحتمالات

التجربة الإحصائية والفضاء العيني والحوادث:

تعريف ١ "التجربة الإحصائية" : هي أي عمليه او مجموعة عمليات لا تعرف نتائجها المسبقة بشكل حتمي فمثلا رمي زهرة نرد او القاء قطعة نقد يمثلان تجربة إحصائية ويسمى هذا النوع من التجارب بالتجارب العشوائية حيث نلاحظ ان النتائج تتغير في كل مره يتم اجراء التجربة فيها ولكل تجربه إحصائية نتائج .

وتعرف النتيجة للتجربة على انها النتيجة البسيطة ، التي لا يمكن تحليلها الى نتيجتين او اكثر وتسمى جميع النتائج البسيطة الممكنة الحدوث بالفضاء العيني للتجربة

تعريف ٢ "الفضاء العيني sample space" : لتجربه إحصائية هي مجموعة جميع النتائج الممكنة لتلك التجربة وسنعبر عن الفضاء العيني بالرمز s.

تعريف ٣: "الحادث event" : هو مجموعة جزئيه من الفضاء العيني ويرمز له بأحد الاحرف التالية .. a,b,c **ويقسم الى قسمين :**

١- **الحادث البسيط :** وهو الحادث الذي يحتوي على نتيجة واحده فقط

٢- **الحادث المركب:** وهو الحادث الذي يحتوي على نتيجتين او اكثر

كما يمكن تعريف بعض من الحوادث التالية:

١- **الحادث المستحيل :** وهو الحادث الذي لا يحتوي على أي عنصر ورمزه $\emptyset$

٢- **الحادث الاكيد :** وهو الحادث الذي يحتوي على جميع عناصر الفضاء العيني S

تعريف ٤ "فضاء العينة المنفصل" : يسمى الفضاء العيني فضاء منفصلاً اذا كان محدودا او لانهائيا معدودا ، أي اذا امكن ربط عناصره واحدا الى واحد مع الاعداد الصحيحة الموجبة كأن نقول اربط العنصر الاول مع العدد١ والعنصر الثاني مع العدد٢ وهكذا الى مالا نهاية

مثال: في تجربة القاء قطعة نقد مرتين ، اوجد الفضاء العيني لهذه التجربة ثم اعط مثال على حادث بسيط ، حادث مركب وحادث اكيد ؟

ملاحظه: سيتم الرمز بالحرف H للصورة، والحرف T للكتابة

الحل: S={(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)}

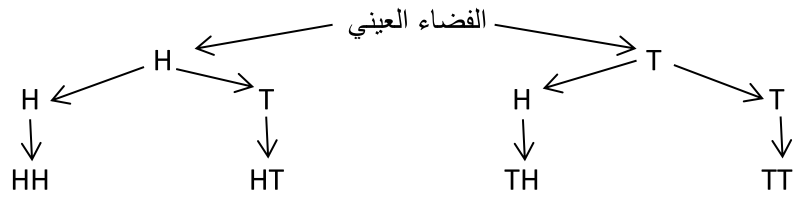
حادث بسيط A={(H,H)}

حادث مركب B={(T,H),(T,T)}

حادث اكيد C= S

لاحظ أن الحادث الأكيد هو الحادث الذي يحتوي على جميع عناصر الفضاء العيني .

شجرة الاحتمال :



تمارين :

تمرين١ : في تجربة القاء قطعة نقد وحجر نرد اوجد الفضاء العيني لهذه التجربة ثم اعط مثال على حادث بسيط وحادث مركب؟

تمرين٢ : في تجربة القاء حجري نرد مرة واحدة، أوجد الفضاء العيني لهذه التجربة واعط مثال على حادث بسيط، حادث مركب وحادث أكيد ؟

الحوادث المتنافية : نقول بأن الحداثين A,B حداثين متنافيان إذا تحقق الشرط التالي : $A \cap B = \emptyset$

العمليات الجبرية على الحوادث:

$A \cup B = \{ x: x \in A \text{ and } x \in B\}$

$A \cap B = \{ x : x \in A \text{ or } x \in B\}$

$A = \{ x : x \in S \text{ and } x \in A\}$

$A - B = \{ x : x \in A \text{ and } x \in B\}$

المحاضرة الثانية : طرق العد

مقدمة: قبل البدء بدراسة مفهوم الاحتمال النسب ولاعتماده بشكل اساسي على عدد عناصر الفضاء العيني لتجربة عشوائية ، فلا بد من معرفة الطرق التي تساعدنا على ذلك . وهناك اربعة طرق للعد سنتعرف عليها على النحو الاتي :

أولًا: قاعدة الضرب : إذا كانت التجربة E1 تحدث في n1 الطرق وكانت التجربة E2 تحدث في n2 من الطرق، فإن التجربتين معا تحدثان في n1n2 من الطرق.

مثال: إذا أراد طالب أن يسجل في مقررين احدهما في قسم الاحصاء والآخر من قسم المحاسبة، فإذا كان عدد المقررات لقسم الاحصاء هو ٤ وعدد المقررات من قسم المحاسبة هو ٥، فما عدد الطرق التي يمكن أن يسجل الطالب فيها؟

الحل : عدد الطرق = ٣ × ٤ = ١٢ طريقة

ملاحظة: يمكن تعميم القاعدة لتشمل k من التجارب.

مثال: كم هاتفا يمكن تركيبه في مدينة الدمام إذا تألف رقم الهاتف من أربعة أرقام بشرط أن يكون الرقم الأول من اليسار أوله العددين ٨ أو ٩ ؟

الحل: عدد الهواتف = ١٠ × ١٠ × ١٠ × ٢ = ٢٠٠٠ طريقة.

(لاحظ أن العدد الأول له طريقتان فقط لاختياره أما باقي المنازل فله ١٠ طرق لاختيارهم هي عباره عن الاعداد من ٠ إلى ٩).

ثانيًا: قاعدة الجمع : إذا كانت تجربة ما تحدث ف n2 من الطرق وكانت تجربة أخرى تحدث ف n2 من الطرق بحيث كان من المعلوم أن التجربتين لا تحدثان معا) مانعتان لبعضهما البعض (فإن واحدة منهم أو الاخرى تحدث في n1+n2 من الطرق.

مثال: أراد طالب أن يسجل مقرر واحد إما من قسم الاحصاء أو قسم المحاسبة، بحيث كان عدد المقررات في قسم الاحصاء ٣ وفي قسم المحاسبة ٤ ، **فما عدد الاختيارات لديه؟**

الحل: عدد الطرق = ٣ + ٤ = ٧ طرق .

ملاحظة: يمكن تعميم قاعد الجمع لتشمل k من التجارب.

ثالثا: التباديل Permutations : التباديل هي طرق ترتيب جميع أو بعض عناصر مجموعة ما.

مثال: ما عدد طرق ترتبٍ جمعٌ الاحرف a, b, c ؟

الحل: لاحظ أنه لدينا ثلاثة اماكن لنملأها من الاحرف الثلاثة حيث يمكن اختيار ثلاثة احرف للمكان الأول أما المكان الثاني فيتبقى لدينا حرفان لملىء المكان واخيرا يبقى حرف واحد لملىء المكان الأخير وبتطبيق قاعدة الضرب نحصل على :

عدد الطرق = ١ × ٢ × ٣ = ٦ طرق

وبشكل عام، لدينا الحالات الثلاث التالية:

١- يمكن ترتيب n من العناصر المختلفة بطرق عددها $nPn = n! = n(n-1)(n-2) \ldots\ldots 3\times2\times1$

وهذا هو عدد تباديل n من العناصر المميزة.

(ملاحظة : تسمى العملية "n1" بمضروب العدد n وهو عبارة عن $n \times (n-1)\times(n-2)\times\ldots\ldots\times 3\times2\times1$ ومثال عليها $4! = 4\times3\times2\times1 = 24$).

مثال: بكم طريقة يمكن ترتيب احرف كلمة "تقوى" ؟

الحل: عدد الطرق يساوي $4P4 = 4\times3\times2\times1 = 24$

٢- في حالة وجود لدينا n من العناصر فيها n1 من العناصر المتماثلة و n2 من العناصر المتماثلة والمختلفة عن الاولى وهكذا لغاية k من العناصر المتماثلة ، فإن عدد التباديل في هذه الحالة يصبح على النحو الآتي : $npn = \frac{n!}{n1!n2!\ldots nk!}$

مثال: ما عدد تباديل احرف كلمة "سلسبيل"؟

الحل: عدد الطرق يساوي $6p6 = \frac{6!}{2!\times2!} = \frac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{2\times1\times2\times1} = 180$

لاحظ أن حرف "س" تكرر مرتنٌ وكذلك حرف "ل" أما بقية الاحرف فتكررت مرة واحدة.

٣- في هذه الحالة كان لدينا n من العناصر المميزة واردنا ترتيب جزء من هذه العناصر وليكن r ، ففي هذه الحالة يكتب قانون التباديل على الصورة التالية : $npr = \frac{n!}{(n-r)!}$

مثال : ما عدد تباديل حرفين من كلمة " تاريخ" ؟

الحل : لاحظ أن عدد احرف كلمة "تاريخ" هو ٥ وبذلك تصبح قيمة n=5 أما r=2 كما هو مطلوب في السؤال وبذلك تصبح عدد الطرق تساوي $5p2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5\times4\times3\times2\times1}{3\times2\times1} = 20$

رابعا: التوافيق Combinations : التوافيق هي الطرق التي نختار بها عددا معينًا من عناصر مجموعة معينة دون النظر الى الترتيب.

مثال : ما عدد الطرق التي نختار بها حرفين من الحروف A,B,C دون الاهتمام بالترتيب ؟

الحل : الاختيارات هي {A,B} , {A,C} , {B,C} وبذلك يكون لدينا ٣ طرق .

وبشكل عام، عدد الطرق التي نختار بها r عنصر من مجموعة فيها n من العناصر بغض النظر عن الترتيب هو عدد توافيق n من العناصر مأخوذة منها r في كل مرة ويعطي بالصيغة التالية : $nCr = \frac{n!}{(n-r)!r!}$

مثال: صف فيه ١٠ طلاب، بكم طريقة يمكن اختيار لجنة مؤلفة من ٣ طلاب دون النظر الى الترتيب؟

الحل: $10C3 = \frac{10!}{(10-3)!3!} = \frac{10\times9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{7\times6\times5\times4\times3\times2\times1} = 120$

مثال: صندوق فيه ٥ كرات حمراء و ٧ كرات بيضاء.

أ- بكم طريقة نختار ٤ كرات من الصندوق؟

ب- بكم طريقة تختار الكرات الأربع بحيث تكون فيها واحدة حمراء وثلاث كرات بيضاء؟

أ) من قاعدة التوافيق، عدد طرق اختيار ٤ كرات من الصندوق يساوي

الحل: $12C4 = \frac{12!}{(12-4)!4!} = \frac{12\times11\times10\times9\times8!}{8!\times4!} = \frac{12\times11\times10\times9}{4\times3\times2\times1} = 495$

ب) عدد طرق اختيار كرة واحدة من الكرات الحمراء هو $5C1 = \frac{5!}{4!\times1!} = \frac{5\times4!}{4!} = 5$

اما عدد طرق اختيار ٣ كرات بيضاء فهو $7C3 = \frac{7!}{4!\times3!} = \frac{7\times6\times5\times4!}{4!\times3\times2\times1} = 35$

إذن، من قاعدة الضرب، عدد طرق اختيار كرة واحدة وثلاث كرات بيضاء هو $3 \times 35 = 175$

تمارين:

١- بكم طريقة يمكن ترتيب كلمة "MISSISSPPI" ؟

٢- بكم طريقة يمكن اختيار رقمين من العدد ٣١٥٩

أ- مع الترتيب؟

ب- بدون ترتيب؟

المحاضرة الثالثة : نظرية الاحتمالات

مقدمة : مفهوم الاحتمال .. هناك عدة طرق متعددة يمكن من خلالها تقديم مفهوم الاحتمال منها :

١/ طريقة الرأي الشخصي : وهي تعتمد على التقدير الشخصي للفرد والذي يرغب بتعيين احتمال حدوث حادث ما ، و كأن يقول احتمال حصوله على تقدير مرتفع لمقرر الاحصاء للإدارة نظرًا للجهد الذي بذله في دراستها .

٢/ طريقة التكرار النسبي :و ويعرف بأنه إذا تكرر إجراء تجربة احصائية n من المرات تحت نفس الظروف وكان عدد المرات التي تؤدي إلى حدوث الحادث A يساوي , n(A) فإن التكرار النسبي لهذا الحادث هو $\frac{n(A)}{n}$ ، وإذا كبرت n بدون حدود وكانت n(A) تكبر معها بحيث يؤول التكرار النسبي في النهاية إلى عدد ثابت ,وليكن p فعندئذ تقول أن احتمال الحادثA هو العدد. p

مثال : عند رمي قطعة نقد عدد معين من المرات بحيث يتم تسجيل ظهور الصورة فيها ، نلاحظ أن التكرار النسبي يقترب من $\frac{1}{2}$ عند رمي قطعة النقد عدد كبير جدًا من المرات. ونقول بأن احتمال ظهور الصورة (H) عند رمي قطعة نقد منتظمة = $\frac{1}{2}$

مثال : إذا كان طلبة إحدى الكليات موزعين على التخصصات المختلفة فيها حسب الجدول التالي:

التخصص	عدد الطلبة
إدارة أعمال	320
محاسبة	480
تسويق	300
علوم مالية ومصرفية	500

إذا قام احد المدرسين بمقابلة أحد الطلبة ,فما هو احتمال أن يكون من قسم المحاسبة؟

الحل: التكرار النسبي لطلبة تخصص المحاسبة يساوي $0.3 = \frac{480}{320+480+300+500}$

أن مفهوم التكرار النسبي يقودنا إلى تقديم التعريف التالي :

فضاء العينة ذو النقط المتساوية إمكانية الحدوث : إذا احتوى الفضاء العيني على عدد من النقاط n بحيث كانت فرصة الحصول على أي نتيجة بسيطة مساوية على أية نتيجة بسيطة أخرى فإنه يقال أن الفضاء العيني S فيه n من النقط إمكانية الحدوث ويكون كل حادث بسيط منفصلا عن أي حادث آخر بحيث يكون احتمال حدوث كل حادث مساويا للحادث الآخر . ومن هذا نحصل على النتيجة التالية : إذا احتوى حادث A على عدد من النقط n(A)، فإن احتمال هذا الحادث هو : $\frac{\text{عدد عناصر الحادث A}}{\text{عدد عناصر الفضاء العيني}} = \frac{n(A)}{n} = p(A) =$

مثال : في تجربة القاء قطعة نقد متزنة ثلاث مرات أوجد احتمال كل من الحوادث التالية :

١/ إذا كان الحادث A يمثل ظهور الصورة (H) مرتين على الاقل ؟

٢/ إذا كان الحادث B يمثل ظهور الاوجه الثلاث متشابهة ؟

الحل : لاحظ أن عناصر الفضاء العيني لهذه التجربة تكتب كما يلي :

S={(H,H,H),(H,H,T),(H,T,H),(H,T,T),(T,T,T),(T,T,H),(T,H,T),(T,H,H)}

لاحظ أن عدد عناصر الفضاء العيني يساوي 2×2×2 = 8 (<u>من قاعدة الضرب</u>).

1- $p(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

احظ أن الحوادث التي ظهرت الصورة فيها مرتين على الاقل هي (H,H,H),(H,H,T),((T,H,H),(H,T,H)

2- $p(B) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

لاحظ ظهور الاوجه الثلاث متشابه في حادثين .

قوانين الاحتمالات: <u>في هذا البند سنورد القوانين الاولية في الاحتمال وهي :</u>

نظرية (1) :

١- إذا كان لدينا المجموعة الخالية ورمزها Ø فإن احتمال هذه المجموعة يساوي صفر . بالرموز $p(\emptyset) = 0$
٢- إذا كان لدينا المجموعة الكلية ورمزها S فإن احتمال هذه المجموعة يساوي 1 . بالرموز $p(S) = 1$
٣- احتمال أي حادث E من الفضاء العيني S يكون محصور بين الصفر والواحد . بالرموز $0 \le p(s) \le 1$

نظرية (2) : إذا كان A حادثًا في s ، وكان Ā هو متممة ذلك الحادث فإن $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$

مثال : إذا كان احتمال نجاح طال في مادة الحاسبة ما هو 80% ، فما احتمال عدم نجاحه في تلك المادة ؟

الحل : بفرض اننا رمزنا لنجاح الطالب في مادة المحاسبة بالرمز A ، فإن احتمال عدك نجاحه يساوي $p(\bar{A}) = 1 - p(A) = 1 - 0.08 =$ 0.20

مثال : إذا كان احتمال وصول طالب إلى محاضراته في الوقت المحدد هو 0.75 فما احتمال وصول الطالب المتأخر ؟

الحل : نفرض أن A = وصول الطالب على الموعد المحدد

Ā = وصول الطالب متأخرًا

$P(\bar{A}) = 1 - p(A) = 1 - 0.75 = 0.25$

نظرية (3) : إذا كان A,B أي حادثين في الفضاء العيني S فإن $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

مثال : إذا كان احتمال غياب طالب عن المحاضرة الأولى هو 0.30 وغيابه عن المحاضرة الثانية هو 0.15 واحتمال غيابه عن المحاضرة الأولى والثانية يساوي 0.20، أجب عن الاسئلة التالية :

أ) ما احتمال غياب الطالب عن أحد المحاضرتين على الأقل ؟

ب) ما احتمال عد غياب الطالب عن أي من المحاضرتين ؟

ج) ما احتمال حضور الطالب للمحاضرة الأولى ؟

الحل : نفرض أن A تمثل غياب طالب عن المحاضرة الأولى ونفرض أن B تمثل الغياب عن المحاضرة الثانية . وبذلك فأن $A \cap B$ يمثل الغياب عن كلا المحاضرتين

أ) $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0.30 + 0.15 - 0.20 = 0.25$

ب) عدم غياب الطالب عن أي محاضرتين يعني أنه حضر المحاضرتين، وهذا يعني متممة الحادث "غياب الطالب عن إحدى المحاضرتين على الأقل" أي أنه متممة $(A \cup B)$ ومن قانون المتممة

$$p\overline{(A \cup B)} = 1 - p(A \cup B) = 1 - 0.25 = 0.75$$

ج) $p(\bar{A}) = 1 - p(A) = 1 - 0.30 = 0.70$

مثال : إذا كان $p(A \cup B) = 0.9 , p(B) = 0.8 , p(A) = 0. 5$. أوجد

أ) $\mathbf{p(A \cap B)}$

ب) $\mathbf{p(\bar{A})}$

ج) $\mathbf{p\overline{(A \cap B)}}$

الحل :

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$
$$0.9 = 0.5 + 0.8 - p(A \cap B)$$

(١)

$$\Downarrow$$

$$p(A \cap B) = 1.3 - 0.9 = 0.4$$

(٢) $p(\bar{A}) = 1- p(A) = 1 - 0.5 = 0.5$

(٣) $p\overline{(A \cap B)} = 1- p(A \cap B) = 1 - 0.4 = 0.6$

ملاحظة : في حال كان الحادثين B,A حادثين منفصلين ، فإن تقاطعهما = $\emptyset$ وبذلك تصبح النظرية (3) على الصورة

$$p(A \cup B) = p(A) + P(B)$$

مثال : إذا كان $p(A) = 0.3$ ، $p(B) = 0.4$ بحيث كان الحادثين B,A حادثين منفصلين ، فأوجد احتمال حدوث الحادث A أو حدوث الحادث B ؟

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) = 0.3 + 0.4 = 0.7$$

لاحظ أن احتمال حدوث الحادث A أو الحادث B او حدوث احدهما على الأقل تعني $p(A \cup B)$ أما في حال السؤال عن احتمال حدوث الحادث A والحادث B أو حدوث كليهما معًا فهذا يعني $p(A \cap B)$

نظرية (4) : إذا كان B,A أي حادثين في الفضاء العيني S فإن

أ) $p(A \cap \bar{B}) = p(A) - p(A \cap B)$

ب) $p(B \cap \bar{A}) = p(B) - p(A \cap B)$

مثال : إذا كان احتمال حضور مدير شركة معينة في يوم ما يساوي 0.9 واحتمال حضور مساعد في ذلك اليوم هو 0.95 واحتمال حضور واحد منهما على الاقل يساوي أو أوجد احتمال

1- حضور المدير ومساعده؟

2- حضور المدير وحده؟

3- حضور المساعد وحده؟

الحل : نعبر عن حضور المدير بالحادث A وحضور المساعد بالرمز ، وحضور احدهما على الأقل بالرمز $A \cup B$

١- من نظرية رقم ثلاث نجد أن :

الحل :

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$
$$0.97 = 0.90 + 0.95 - p(A \cap B)$$

$$\Downarrow$$

$$p(A \cap B) = 1.85 - 0.97 = 0.88$$

٢- حضور المدير وحده تعني أن المدير حضور وغيابك مساعد ، وهذا يعني حدوث الحادث A وعدم حدوث الحادث

$$p(A \cap \bar{B}) = p(A) - p(A \cap B)\ 0.90 - 0.88 = 0.02$$

٣- حضور المساعد وحده تعني أن المساعد حضر والمدير غاب حدوث B وعدم حدوث A .

$$p(B \cap \bar{A}) = p(B) - p(A \cap B) = 0.95 - 0.88 = 0.07$$

تمارين : في تجربة القاء حجر نرد منتظم مرتين اوجد احتمال ما يلي :

1- ظهور عددين متشابهين

2- ظهور عددين مختلفين

3- ظهور عددين مجموعهما أكبر من12 ؟

4- ظهور عدين بحيث يكون الأول عدد فردي؟

المحاضرة الرابعة
تابع نظرية الاحتمالات

قوانين ديمورغان De Morgan's Laws:

من خواص العمليات الجبرية على المجموعات ما يسمى بقوانين ديمورغان والتي تنص على أن :

- $(\overline{AUB}) = \bar{A} \cap \bar{B}$
- $(\overline{A \cap B}) = \bar{A} U \bar{B}$

ومنها نستنتج :

- $P(\overline{AUB}) = P(\bar{A} \cap \bar{B})$
- $P(\overline{A \cap B}) = P(\bar{A} U \bar{B})$

+ **مثال : إذا كان $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.4$, $P(AUB) = 0.5$ أوجد ما يلي :**

١- **احتمال حدوث الحادثين معاً .**

$$P(AUB) = P(A) + P(B) – P(A \cap B)$$
$$0.5 = 0.3 + 0.4 - P(A \cap B)$$
$$P(A \cap B) = 0.7 – 0.5 = 0.2$$

٢- **عدم حدوث الحادثين أي من الحادثين B, A.**

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{AUB}) = 1- P(A \cup B) = 1-0.5 = 0.5$$

٣- **عدم حدوث الحادث A أو الحادث B.**

$$P(\bar{A} U \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) =1 – P(A \cap B) = 1-0.2 = 0.8$$

٤- **حدوث الحادث A وعدم حدوث الحادث B.**

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0.3 - 0.2 = 0.1$$

٥- **حدوث الحادث B وعدم حدوث الحادث A.**

$$P(B \cap \bar{A}) = P(B) - P(A \cap B) = 0.4 – 0.2 = 0.2$$

٦- **احتمال حدوث الحادث A أو الحادث B إذا كان A, B حادثين منفصلين.**

$$P(AUB) = P(A) + P(B) = 0.3 + 0.4 = 0.7$$

الاحتمال الشرطي Conditional Probability:

يعرف الاحتمال الشرطي على أنه احتمال وقوع الحادث A مشروطاً بحدوث الحادث B .. ويرمز له بالرمز $P(A/B)$ ويعرف كالآتي:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, P(B) > 0$$

وكذلك يمكن تعريف الاحتمال الشرطي للحادث B مشروطاً بحدوث الحادث A على النحو الآتي:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} P(A) > 0$$

+ **مثال : رميت قطعة نقد ٣ مرات ، فإذا رمزنا لظهور الصورة بحرف H وظهور الكتابة بحرف T . إذا علم أن الوجه الأول في الرمية الأولى H ، فما احتمال أن يكون الوجهان الآخران H,H ؟**

الحل :

- الفضاء العيني S = {(H,H,H),(H,H,T),(H,T,H),(H,T,T),(T,T,T),(T,T,H),(T,H,T),(T,H,H)}
- نفرض أن A يمثل الحادث *ظهور H في المرة الأولى* .. - نفرض أن B يمثل *ظهور H, H في الرمية الثالثة والثانية*
- المطلوب $P(A/B)$؟
- قانون الاحتمال: $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$
- بالنظر لفضاء العينة :

$$P(A) = \frac{4}{8}$$
$$P(A \cap B) = \frac{1}{8}$$

- بالتعويض في قانون الاحتمال الشرطي نحصل على:

$$P(B/A) = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{4}{8}} = \frac{1}{4}$$

سؤال: اعتماداً على المثال السابق إذا علمت أن الوجه الأول كان T فما احتمال أن يكون الوجهان الآخران H, T؟

قاعدة الضرب Multiplication Rule:

من خلال تعريف الاحتمال الشرطي نجد أن :

- $P(A \cap B) = P(A) P(B/A)$
- $P(A \cap B) = P(B) P(A/B)$

+ **مثال : إذا كان $P(A)=0.6$ - $P(B)=0.3$ - $P(A/B)=0.4$ -**
أوجد :
- $P(B/A)$
$$P(B/A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$
$$= \frac{0.3+0.4}{0.6} = \frac{0.12}{0.6} = 0.2$$

- $P(A\cap B)$
$$P(A\cap B) = P(A)\, P(B/A)$$
$$= 0.6 \times 0.4 = 0.12$$

الحوادث المستقلة Independent Events:

تعريف: يقال بأن الحادثان A,B حادثان مستقلان إذا كان حصول أحدهما لا يؤثر على الآخر. أي أن:
$$P(A/B) = P(A)$$
لاحظ أن حدوث A لا يتأثر بوجود الحادث B، وكذلك
$$P(B/A) = P(B)$$
وبتعويض هذه القيم في قانون الاحتمال الشرطي : $P(B/A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$
نحصل على : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

+ **مثال : إذا كان A,B حادثين مستقلين ، وكان $P(A) = 0.4$ و $P(B) = 0.6$**
أوجد :
- $P(A\cap B)$
$$P(A\cap B) = P(A) \times P(B) = 0.4 \times 0.5 = 0.24$$

– $P(\overline{A \cap B})$
$$P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A\cap B) = 1 - 0.24 = 0.76$$

+ **مثال : إذا كان $P(A) = 0.6$ - $P(A/B) = 0.6$ - $P(B/A) = 0.5$ – هل الحادثان A,B مستقلان ؟ وما احتمال الحادث B؟**
الحل :
بما أن $P(A/B) = P(A) = 0.6$ فإن الحادثان A,B مستقلان .
مع ذلك نجد أن $P(B) = P(B/A) = 0.5$

تمارين : إذا كان $P(B) = 0.8$ - $P(A) = 0.7$ –
أوجد ما يلي :

١- **$P(AUB)$ إذا كانا حادثين مستقلين .**
$$P(AUB) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) = 0.8 + 0.7 - (0.8 \times 0.7) = 0.94$$

٢- **$P(AUB)$ إذا كانا حادثين منفصلين .**
$$P(AUB) = P(A) + P(B) = 0.8 + 0.7 = 1.5$$

٣- **$P(\overline{A \cap B})$ إذا كانا حادثين مستقلين .**
$$P(\overline{A \cap B}) = 1- P(A\cap B) = 1 - (0.8 \times 0.7) = 0.44$$

٤- **$P(A/B)$ إذا كانا حادثين مستقلين .**
$$P(A/B) = P(A) = 0.7$$

٥- **$P(B/A)$ إذا كانا حادثين منفصلين .**
$$P(B/A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{0}{0.7} =$$

المحاضرة الخامسة

الفصل الثاني: المتغيرات العشوائية والتوزيعات الاحتمالية المنفصلة

- **مقدمة**

في كثير من الأحيان تكون نتائج تجربة ما قياسات وصفية أو نوعية، مثل الفضاء العيني لتجربة إلقاء قطعة نقط مرة واحدة إما H وإما T وهي قياسات نوعية أما في تجربة إلقاء حجر نرد فتكون النتائج الأعداد من ١ إلى ٦ وتكون النتائج في هذا الفضاء العيني نتائج قياسية (كميات عددية). وفي جميع هذه الأنواع من التجارب التي تكون النتائج فيها قياسات نوعية أو قياسات كمية فإننا سنقوم بربط كل نتيجة من نتائج الفضاء العيني لتجربة إحصائية بقيمة عددية من خلال تعريف اقترانات حقيقية على نقاط فضاء العينة وبالتالي إعطاءنا المجال.

- **المتغير العشوائي Random Variable:**

تعريف: المتغير العشوائي X هو اقتران حقيقي يعرف على فضاء العينة بحيث يعين قيمة عددية لكل نتيجة بسيطة فيه، ويرمز له بحرف لاتيني كبير Y, X ... ولأي قيمة لذلك المتغير بحرف صغير y, x ...

مثال: عرف المتغير العشوائي X والذي يمثل عدد مرات ظهور الصورة H في تجربة القاء قطعة نقد ثلاث مرات؟

الحل:

عناصر الفضاء العيني	قيمة X
HHH	3
HHT	2
HTH	2
HTT	1
TTT	0
TTH	1
THT	1
THH	2

نلاحظ أن كل نتيجة بسيطة من عناصر الفضاء العيني تأخذ قيمة واحدة معينة حيث البعض منها يتشابه في ذلك العدد وبذلك نستطيع إعادة تنظيم النتائج السابقة علة الصورة التالية:

النتيجة	قيمة X
{HHH}	3
{THH, HTH, HHT}	2
{THT, TTH, HTT}	1
{TTT}	0

إن مجموعة القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X تسمى فضاء X والمجموعات الجزئية لهذا الفضاء تسمى حوادث تعبر عنها بدلالة X. ففي المثال السابق تكون الحوادث {X=0} ,{X=2}, {X=3}.

مثال: اعتماداً على المثال السابق عرف المتغيرات العشوائية التالية:

أ) المتغير العشوائي Y يمثل الفرق المطلق بين بين عدد H وعدد T؟

ب) المتغير العشوائي Z يمثل عدد H ناقصاً عدد T؟

الحل: أ)

الحادث المقابل	قيمة Y
{TTH, THT, THH, HTH, HTT, HTT}	1
{TTT, HHH}	3

ب)

الحادث المقابل	قيمة Z
{TTT}	-3
{HTT, THT, TTH}	-1
{HHT, HTH, THH}	1
{HHH}	3

- **أنواع المتغيرات العشوائية:**

ينقسم المتغير العشوائي إلى قسمين:

١- **المتغير العشوائي المنفصل (Discrete):** وهو المتغير الذي يأخذ قيماً إما محدودة أو لا نهائية محدودة بمعنى أنه يمكن ربط قيمة واحداً لواحد مع مجموعة الأعداد الصحيحة. ومن الأمثلة عليه عدد أفراد الأسرة، عدد المواليد...

٢- **المتغير العشوائي المتصل (Continuous):** وهو المتغير الذي يأخذ جميع القيم في فترة ما ومن الأمثلة على ذلك: درجة الحرارة، وزن الإنسان...

نلاحظ أن كل قيمة من قيم المتغير العشوائي X يقابله حادث أو مجموعة من الحوادث من فضاء العينة S وبالتالي يمكن تعيين احتمالاً لهذا الحادث بدلالة المتغير العشوائي مساوياً لاحتمال الحادث في فضاء العينة S. والمثال التالي يوضح ذلك.

مثال: في تجربة إلقاء قطعة نقد ثلاث مرات حيث X يمثل عدد مرات ظهور الصورة H، أوجد:

١- P{X=3}   ٢- P{X=2}

الحل: ١- نلاحظ أن X=3 يقابل الحادث HHH وبالتالي $P(X=3) = \frac{1}{8}$

٢- في حالة X=2 فنلاحظ أن الحوادث التي تقابل هذه القيمة هي {HHT, HTH, THH} وبالتالي

$$P(X=2) = \frac{3}{8}$$

ويمكننا وضع جدول يعطينا قيم X والاحتمالات المقابلة لها كما في الجدول التالي:

P(X=X)	قيمة X
$\frac{1}{8}$	3

2	$\frac{3}{8}$
1	$\frac{3}{8}$
0	$\frac{1}{8}$

تمرين: في تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرتين، إذا كان المتغير العشوائي X يمثل مجموعة العددين الظاهرين، عرف ذل كالمتغير واحتمال كل منهما؟

الجدول السابق يقودنا إلى التعريف التالي:

- **التوزيع الاحتمالي المنفصل Discrete Probability Distribution:**

تعريف: كل جدول أو معادلة يعطي جميع القيم التي يمكن أن يأخذها متغير عشوائي منفصل مع احتمال كل قيمة منها يسمى توزيعاً احتمالياً منفصلاً أو اقتران احتمالي، بحيث يحقق الشرطين التاليين:

١- احتمال كل قيمة من قيم X عدد غير سالب.

٢- مجموع الاحتمالات للقيم التي يأخذها X تساوي ١.

وإذا عبرنا بالرمز $f(x)$ للاحتمال P(X=x) فإن الشرطين السابقين يصبحان على الصورة:

$f(x) \geq 0$ ، لجميع قيم x

$\sum f(x) = 1$ ، لجميع قيم x

مثال: هل تمثل المعادلة $f(x) = \frac{x}{15}\,;\, x = 1, 2, 3, 4, 5$ لغير ذلك: $f(x) = 0$ توزيعاً احتمالياً منفصلاً؟

الحل: لاحظ أن الشرط الأول متحقق لجميع قيم X. أما مجموع قيم $f(x)$ فهي:

$$\sum_{1}^{5} f(x) = \frac{1}{15} + \frac{2}{15} + \frac{3}{15} + \frac{4}{15} + \frac{5}{15} = \frac{15}{15} = 1$$

إذا: f(x) توزيع احتمالي حقق الشرطين الأول والثاني.

يمكن وضع المعادلة على شكل جدول على الصورة:

X	١	٢	٣	٤	٥	المجموع
$f(x)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{5}{15}$	1

مثال: أوجد قيمة a في الجدول التالي والتي تجعل ذلك الجدول يمثل توزيعاً احتمالياً واحسب احتمال X اكبر من ٤ واحتمال X أقل من أو تساوي ٤؟

x	١	٢	٣	٤	٥	٦
$f(x)$	**a**	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$

الحل: بما أن $\sum(x) = 1$ فإن:

$$a + \frac{1}{10} + \frac{3}{20} + \frac{1}{20} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = 1$$

وبتوحيد المقامات نجد أن:

$$a = 1 - \frac{14}{20} = \frac{20}{20} - \frac{14}{20} = \frac{5}{20} = \frac{3}{10}$$

ولإيجاد احتمال X أكبر من ٤:

$$P(X > 4) = P(X = 6) = \frac{1}{5} = \frac{1}{10} = \frac{3}{10}$$

أما لإيجاد احتمال X أقل من أو يساوي ٤:

$$P(X \leq 4) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = \frac{3}{10} + \frac{3}{20} + \frac{1}{20} + \frac{1}{5} = \frac{14}{20} = \frac{7}{10}$$

المحاضرة السادسة

الفصل الثاني : المتغيرات العشوائية و التوزيعات الاحتمالية المنفصلة

- **التوقع الرياضي للمتغير العشوائي :**

تعريف : التوقع الرياضي للمتغير العشوائي المنفصل الذي اقترانه الاحتمالي f (x) هو المقدار التالي :

$$\mu = E\ (X) = \sum_{x} xf\ (x)$$

مثال : اوجد التوقع الرياضي للمتغير X و الذي توزيعه الاحتمالي موضح في الجدول التالي :

X	*f*(x)	X*f* (x)
3	0.3	0.9
4	0.2	0.8
5	0.2	1.0
6	0.1	0.6
7	0.2	1.4

الحل : من خلال ضرب القيمة x في f(x) كما هو موضح في العمود الثالث و بعملية الجمع نحصل على

$$\mu = E(X) = \ 4.7$$

مثال : اوجد توقع *X* اذا كان

$$f\ (X) = \frac{x}{15}\ ;\ x = 1, 2, 3, 4, 5$$

لغير ذلك *f* (x) = *0*

الحل :

$$\mu = E(X) = \sum_{x} xf\ (x) = \ 1 \times \frac{1}{15} + 2 \times \frac{2}{15} + 3 \times \frac{3}{15} + 4 \times \frac{4}{15} + 5 \times \frac{5}{15}$$

$$= \frac{1+4+9+16+25}{15} = \frac{55}{15} = \frac{11}{3}$$

- **خواص التوقع الرياضي**

نظرية (١) : لكل متغير عشوائي *X* ، اذا كان a , b عددين ثابتين فان :

$$E\ (\ aX + b\ ) = \ aE(x) + \ b$$

وهذا يعني انه اذا ضرب المتغير العشوائي بعدد ثابت وليكن a ، و اضيف له عدداً ثابتاً آخر وليكن b *فان التوقع الرياضي يتأثر بنفس الطريقة فيصبح بعد التعديل مساوياً للتوقع الاصلي مضروبا في* a *و مضافا اليه العدد* b .

مثال : اذا كان $E(X) = 6$ ، اوجد

١- $E(3X + 5)$

٢- $E(0.5X - 2)$

الحل :

١- $E(3X + 5) = \ 3 \times 6 + 5 = 23$

٢- $E(0.5X - 2) = \ 0.5 \times 6 - 2 = 1$

مثال : اذا كان $E(X) = \ 10$ وكان $E(ax + 5) = 25$ ، اوجد قيمة a ؟

الحل :

$$E(ax + b) = \ aE(X) + b = a \times E(X) + b = a \times 10 + 5 = 25\ \rightarrow 10a = 20\ \rightarrow a = 2$$

تمرين : اعتماداً على الجدول التالي و الذي يمثل توزيع احتمالي منفصل للمتغير العشوائي x

x	*f* (x)
1	0.3
2	0.4
3	0.1
4	a

اوجد :

١- قيمة المجهول a

٢- *المتوقع الرياضي للمتغير العشوائي* x

٣- $E(2X + 10)$ ؟

تباين المتغير العشوائي X

تعريف : اذا كان μ توقع المتغير العشوائي X تباين X و يعبر عنه بالرمز σ^2 بالصيغة التالية :

$$\sigma^2 = \sum_{X}(X-\mu)^2 f(x)$$

مثال : جد تباين X اذا كان توزيعه الاحتمالي كما يلي :

x	f (x)
10	$\frac{1}{4}$
20	$\frac{1}{4}$
30	$\frac{1}{4}$
40	$\frac{1}{4}$

الحل : نجد اولا توقع x كما يلي :

$$\mu = E(X) = 10 \times \frac{1}{4} + 20 \times \frac{1}{4} + 30 \times \frac{1}{4} + 40 \times \frac{1}{4} = 25$$

و لحساب التباين ، نجد ان :

$$\sigma^2 = \sum_{X}(X-\mu)^2 f(x)$$

$$= (10-25)^2 \times \frac{1}{4} + (20-25)^2 \times \frac{1}{4} + (30-25)^2 \times \frac{1}{4} + (40-25)^2 \times \frac{1}{4}$$

$$= \frac{225+25+25+225}{4} = 125$$

اما الجذر التربيعي الموجب للتباين فيسمى الانحراف المعياري و يعبر عنه بالرمز σ حيث نلاحظ ان الانحراف المعياري للمثال السابق هو

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{125}$$

خواص التباين :

اذا كان X متغيرا عشوائيا منفصلا معدله μ وتباينه σ_X^2 وكان لدينا التحويل $Y = aX + b$ حيث b,a ثابتان فان

$$\sigma_Y^2 = a^2\, \sigma_x^2$$

اما الانحراف المعياري للمتغير Y فهو

$$\sigma_Y = |a| \sigma_y$$

مثال : اذا كان للمتغير X, $\mu_2 = 50$, $\sigma_X^2 = 16$ اوجد معدل Y وتباينه و انحرافه المعياري اذا كان Y = 3X – 4 ؟

الحل : $\mu_Y = E(3X-4) = 3\mu_X - 4 = 3 \times 50 - 4 = 146$

$$\sigma_Y^2 = 3^2 \times \sigma_X^2 = 9 \times 16 = 144$$

$$\sigma_Y = \sqrt{144} = 12$$

توزيعات احتمالية خاصة : هنالك كثير من المتغيرات العشوائية التي شاع استعمال توزيعاتها الاحتمالية بحيث من المفيد دراسة كل منها على حده ، ومن هذه التوزيعات

١- **توزيع ذات الحدين** في كثير من التجارب تكون النتيجة احد الامرين اما نجاح او فشل ، وتتألف هذه التجارب من تكرار و اعادة المحاولات المستقلة عن بعضها البعض ، فمثلا في تجربة القاء قطعة نقد فان النتيجة اما ظهور صورة او كتابة و تكون نتيجة أي محاولة مستقلة عن الاخرى وهكذا . ان هذه المحاولات تسمى محاولات بيرنوللي

تعريف : محاولات بيرنوللي : كل تجربة تحقق الشروط التالية تسمى محاولات بيرنوللي :

١- نتيجة كل محاولة احد الأمرين ، نسمي "احدها" نجاح و الأخرى "بالفشل"

٢- نتيجة كل محاولة مستقلة عن أي المحاولة الأخرى

٣- احتمال النجاح في كل محاولة عدد ثابت يرمز له بالرمز P *وبذلك فان احتمال الفشل* هو q = 1-p

ومن الامثلة على هذه التجارب : فحص مجموعة من المصابيح الكهربائية ، فحص مجموعة من الطلاب لمعرفة حاجته الى نظارات طبية ....

تعريف : اذا اجريت تجربة بيرنوللي n من المرات وكان احتمال النجاح في المحاولة الواحدة p وكان x يمثل عدد النجاحات في المحاولات كلها فان :

$$\boldsymbol{P\ (X = x) = nCx \times p^x \times (1-p)^{n-x};\, x = 0, 1, 2, \dots, n}$$

وهذا هو التوزيع الاحتمالي لمتغير ذات الحدين ويرمز له بالرمز b(x;n;p) .

مثال : رميت قطعة نقد متزنة اربع مرات ، جد التوزيع الاحتمالي لهذه التجربة ثم اوجد احتمال ظهور الصورة اربع مرات ؟

الحل : ان هذه التجربة تحقق شروط تجربة ذات الحدين حيث ان $n = 4$, $p = \frac{1}{2}$ ، ومنها

$$b\left(x; 4; \frac{1}{2}\right) = p(X = x) = 4Cx \times (\frac{1}{2})^x \times (1-\frac{1}{2})^{4-x};\, x = 0,1,2, \dots$$

وعند X=4 ، ينتج ان :

$$\text{و}b\left(4; 4; \frac{1}{2}\right) = p(x=4) = 4C4 \times (\frac{1}{2})^4 \times (1-\frac{1}{2})^{4-4} = 1 \times (\frac{1}{2})^4 \times (\frac{1}{2})^0 = \frac{1}{16}$$

ويمكن حساب احتمال عدم ظهور الصورة (P (X=0 او ظهور الصورة مرة واحدة (P(X=1 وهكذا .

تمرين ١ : رميت زهرة نرد منتظمة ثلاث مرات ، ما احتمال عدم ظهور العدد 6 فيها ، ما احتمال ظهور العدد 6 ثلاث مرات ؟

تمرين ٢ : في تجربة ذات الحدين ، اذا كان $n = 15$, $p = 0.1$ اوجد $p(x \leq 2)$ حيث X يمثل عدد النجاحات ؟

خواص التوقع الرياضي و التباين العشوائي الذي يتبع توزيع ذات الحدين :

نظرية : اذا كان X متغيرا عشوائيا يتبع توزيع ذات الحدين b(x; n; p) *فان :*

١) توقع X هو $\mu = E(X) = np$

٢) تباين X هو $\sigma^2 = npq$

مثال : ما هو التوقع الرياضي و التباين لمتغير ذات الحدين اذا كان $n = 60$, $p = \frac{2}{3}$

الحل : $\mu = E(X) = 60 \times \frac{2}{3} = 40$

$$\sigma^2 = npq = 60 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{40}{3}$$

١- **توزيع بواسون :**

ان التجارب التي تعطينا عدد النجاحات في فترة زمنية معينة او منطقة محددة تسمى بواسون . و الفترة الزمنية قد تكون دقيقة او يوما او اسبوعا او شهرا او غير ذلك اما المنطقة المحددة فقد تكون صفحة كتاب او مترا مربعا او غير ذلك

وبشكل عام تجربة بواسون تحقق الشروط التالية :

١- معدل النجاحات التي تحدث في فترة زمنية معينة او منطقة محددة معلوم وليكن λ
٢- احتمال حدوث نجاح حادث واحد في فترة زمنية قصيرة او منطقة زمنية صغيرة يتناسب مع طول تلك الفترة او مساحة تلك المنطقة .
٣- احتمال حدوث نجاحين او اكثر في فترة زمنية قصيرة او منطقة صغيرة مهمل .
٤- حدوث النجاحات في أي فترة زمنية مستقل عن حدوث أي نجاحات اخرى في عدة فترات زمنية منفصلة .

تعريف : توزيع بواسون

التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي بواسون X الذي يمثل عدد النجاحات في فترة زمنية معينة او منطقة محددة هو

$$P(x;\lambda) = P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}; x = 0,1,2, \dots$$

حيث λ هي معدل النجاحات في الفترة الزمنية المعينة او المنطقة المحددة e= 2.718

مثال : تصل المكالمات الهاتفية الى مقسم احد المستشفيات بمعدل مكالمة واحدة في الدقيقتين

ما احتمال وصول كل من الحوادث التالية :

أ) صفر مكالمة في اربع ؟

ب) 4 مكالمات في فترة اربع دقائق ؟

الحل : نفرض ان X = عدد المكالمات في فترة اربع

اذن $\lambda = \frac{1}{2} \times 4 = 2$

ان X يتبع توزيع بواسون الذي معدله $\lambda = 2$ وينتج ان

أ) عدم وصول أي مكالمة في اربع دقائق هو :

$$P(0;2) = P(X = 0) = \frac{e^{-2}2^{0}}{0!} = e^{-2} = 0.1353$$

ب) وصول اربع مكالمتا في اربع دقائق هو :

$$p(4;2) = p(x = 4) = \frac{e^{-2}2^{4}}{4!} = \frac{16}{24}e^{-2} = 0.0902$$

تمرين : معدل حوادث السيارات عند اشارة ضوئية 3 في الاسبوع الواحد . ما احتمال عدم حدوث أي حادث في اسبوع معين ، ما احتمال حادثين او اقل في اسبوع معين ؟

خواص التوقع الرياضي و التباين للمتغير العشوائي الذي يتبع توزيع بواسون :

نظرية : اذا كان X متغير بواسون العشوائي الذي توزيعه الاحتمالي P(x;λ) حيث λ معدل عدد الحوادث في فترة زمنية معينة فان توقع X هو E(X) = λ وتباين X هو $\sigma = \frac{2}{X} = \lambda$

مثال : ما هو التوقع الرياضي و الانحراف المعياري لمتغير عشوائي يتبع توزيع بواسون اذا كان25 =λ ؟

الحل : $E(X) = 25, \sigma_X = 5$

لاحظ ان الانحراف المعياري هو الجذر التربيعي للتباين .

المحاضرة الثامنة

الفصل الثالث: التوزيعات الاحتمالية المتصلة

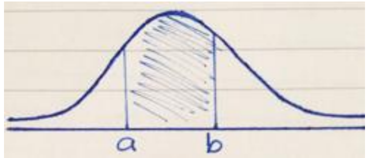
تعريف: إذا كان X متغير عشوائي متصل وكان f(x) اقتران حقيقي يتحقق الشرطان التاليين:

١- $f(x) \geq 0\,, -\infty < X < \infty$

٢- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

(عن المساحة تحت منحنى f(x) وفوق محور السينات = ١ فإن f(x) تسمى الكثافة الاحتمالية أي التوزيع الاحتمالي المتصل للمتغير X.

ويكون احتمال وقوع X بين قيمتين a = x , b = x يساوي المساحة تحت منحنى f(x) وفوق المحور الأفقي والمحصور بين a , b والشكل التالي يوضح ذلك



أي أن:

P($a < x < b$) = $\int_a^b f(x)dx$

ومن أنواع التوزيعات الاحتمالية المتصلة التي سنتعرف عليها في هذا الفصل:

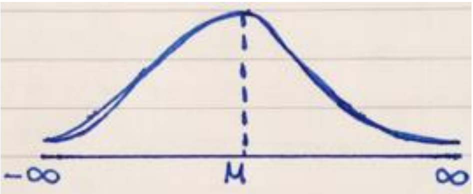
١- التوزيع الطبيعي (The normal Distribution): ويعتبر من أهم التوزيعات الاحتمالية المتصلة حيث يوصل التوزيع الطبيعي من خلال معادلة رياضية تحدد منحناه وتعين تماماً وبمعرفة كل من المعدل μ والتباين س٢ والتي يمكن كتابتها على الصورة التالية:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \text{س}}} e^{-}(X-\mu)^2/\ 2\text{س}^2$$

حيث μ: معدل التوزيع ، س٢: التباين ، $e \approx 2.718$ ، π=3.14 ، واحتمال الحادث X هو الذي يقع بين النقطتين a ، b هو:

$$p(a < x < b <) = \int_a^b f(x)dx$$

وسنعبر عن المتغير العشوائي X والذي يخضع للتوزيع الطبيعي الذي معدله μ وتباينه س٢ بالرمز (س ٢ ,X:N (M



*** خواص التوزيع الطبيعي:**

١- مماثل حول العمود المقام على الوسط الحسابي M بحيث يشبه شكله شكل الجرس.

٢- له قيمة واحدة، وبذلك له منوال واحد ينطبق على الوسط الحسابي M.

٣- تقارب طرفا منحنى التوزيع الطبيعي من الصفر عندا $-\infty \leftarrow X$ ، $\infty \leftarrow X$.

٤- المساحة تحت منحنى التوزيع الطبيعي تساوي ١.

٢- التوزيع الطبيعي المعياري (Standard Normal Distribution): هو التوزيع الطبيعي الذي معدله (وسد الحسابي) يساوي صفر وتباينه يساوي ١، وسنعبر عن التوزيع بالرمز Z: N (0, 1).

نظرية: إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X هو التوزيع الطبيعي ذو المعدل μ والتباين س٢ فإن توزيه المتغير العشوائي:

Z = $\frac{X-M}{\text{س}}$ هو التوزيع الطبيعي المعياري.

كل قيمة من X تقابلها قيمة من قيم Z حسب التحويل السابق وتسمى قيم Z القيم المعيارية المقابلة لقيم X.

مثال: إذا كان X: N (70,25) ، أوجد القيم المعيارية المقابلة لكل من القيم التالية:

١- $X_1 = 62$

٢- $X_2 = 13$

الحل: لتحويل قيم X إلى قيم Z ، نستخدم التحويل التالي: Z = $\frac{X-M}{\text{س}}$ (س= الانحراف المعياري)

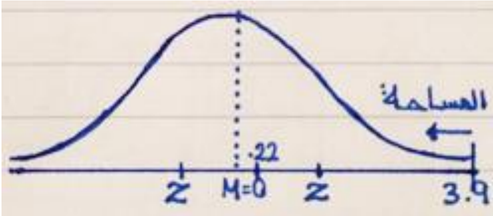
1- $Z_1 = \frac{65-70}{5} = \frac{-5}{5} = -1$

2- $Z_2 = \frac{13-7-}{5} = \frac{-57}{5}$

*** المساحات تحت التوزيع الطبيعي:** نستخدم جداول التوزيع الطبيعي المعياري لإيجاد المساحة المحصورة بين متغيرين عشوائيين حيث تعطى هذه الجداول المساحة إلى يسار ثم Z بشكل عام موجبة كانت أم سالبة بمعنى (P (Z < z.

لاحظوا أن العمود الأيسر في الجدول يعطي قيم Z ذات خانة عشرية واحدة والصف العلوي يعطي الخانة العشرية الثانية، وتقاطع الصف مع العمود يعطي المساحة المطلوبة.

المساحة تحت منحنى التوزيع الطبيعي المعياري.



(قيم Z موجبة) .... (قيم Z سالبة)

> نستخدم القيم .... > نستخدم الجداول

الإحصائية لقيم .... الإحصائية لقيم

Z الموجبة .... Z السالبة

[داخل جسم الجدول هي عبارة عن المساحات التي تقع على يسار قيمة معيات معينة]

أمثلة على المساحة التي تقع على يسار قيم معيارية مختلفة:

القيمة المعيارية Z المقابلة لقيمة X المختلفة ←

Z 3.4	= 1
Z 0.52	= 0.6982
Z 3.48	=0.0003
Z 0.11	0.4562

→ هي عبارة عن المساحات على يسار قيمة معيارية معينة

المحاضرة التاسعة

الفصل الثالث : التوزيعات الاحتمالية المتصلة

$$X : N\ (\ H\ , \sigma^2) \rightarrow Z\ :\ N\ (\ 0, 1)$$

$\downarrow$ متغير عشوائي ينتمي للتوزيع الطبيعي الذي معدلة M و تباينه σ^2 .

$\downarrow$ قيم معياريه مثاليه للمتغير العشوائي X حيث تنتمي الى التوزيع الطبيعي المعياري الذي وسطه صفر وتباينه 1.

- **هناك تحويل بين قيم المتغيرات العشوائية X الى قيم معياريه مقابلة لها تعطى بالصيغة :**

$$Z = \frac{X-H}{\sigma}$$

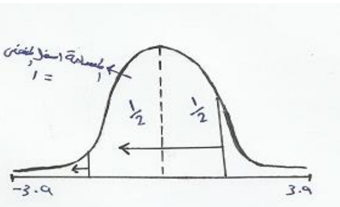
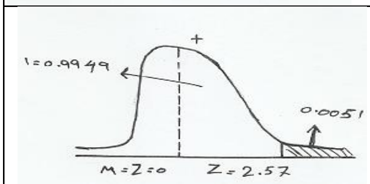
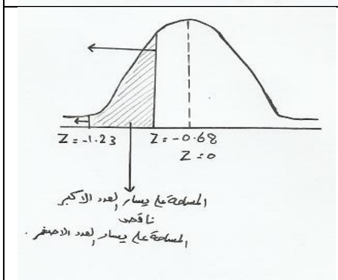
مثال : اذا كان لدينا Z:N (0,1) ، اوجد مايلي :

١) $P\ (\ Z < 1)$

٢) $P\ (\ Z < -1.96\ )$

٣) $P\ (\ Z > 2.57)$

٤) $P\ (\ -1.32\ < Z < -0.68)$

الحل : ١) $P\ (\ Z< 1)$ **مباشرة من الجداول** $= 0.5413$ ٢) $P\ (\ Z< -1.96)$ **مباشرة من الجداول** $= 0.0250$	
٣) $P\ (\ Z > 2.57) = 1 - P(Z < 2.57)$ $= 1 - 0.9949$ $= 0.0051$	
٤) $P(-1.32 < Z < -0.68)$ $= P(Z < -0.68) - P(Z < -1.32)$ **من الجداول الاحصائية** $= 0.2483 - 0.0934$ $= 0.1549$	

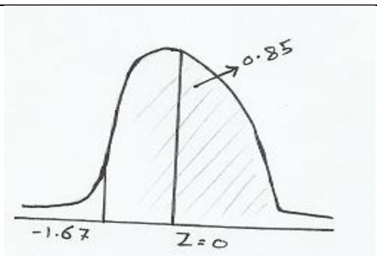
مثال : اذا كان X:N (65, 36) اوجد :

١) $P(X > 55)$

٢) $P(X < 68)$

٣) $P(50 < X < 70)$

الحل : لابد من عملية تحويل المتغير العشوائي الذي يتبع التوزيع الطبيعي الى قيمة معيارية Z لإيجاد المساحات .

١) $Z = \frac{X-M}{\sigma} = \frac{55-65}{6} = \frac{-10}{6} = -1.67$ $P(X > 55) = P(Z > -1.67)$ $1 - P(Z < -1.67)$ $= 1 - 0.0475$ $= 0.9525$	

٢) $P(X < 68) = P(Z < 0.5)$

$$Z = \frac{X-H}{\sigma} = \frac{68-65}{6} = \frac{3}{6} = 0.5$$

(عملية التحويل) $= \frac{3}{6} = 0.5$

٣) $P(50 < X < 70) = P(-2.5 < Z < +0.83)$

$$= P(Z < 0.83) \qquad Z_1 = \frac{X-M}{\sigma} = \frac{50-65}{6} = \frac{-15}{6} = -2.5$$

$$Z_2 = \frac{X - M}{\sigma} = \frac{70 - 65}{6} = \frac{5}{6} = 0.83 \qquad = P(Z < -2.5)$$

$$= 0.7967 - 0.0062 = 0.7905$$

- **تطبيقات على التوزيع الطبيعي :**

في هذا البند سنقوم بإعطاء بعض الامثلة كتطبيقات على استعمال التوزيع الطبيعي .

مثال : تخضع اوزان عبوات احدى انواع الحلويات لتوزيع طبيعي وسطه 85 غم وانحرافه المعياري 25 غم

أ) ما هو احتمال ان وزن احدى العبوات التي اخذت بشكل عشوائي تزيد على 90 غم ؟

ب) ما هو احتمال ان وزن احد العبوات والتي اخذت بشكل عشوائي تقل عن 82 غم ؟

الحل :

نفرض ان وزن العبوات =X ،

$X:N\ (85\ ,\ 2.5^2)$

المطلوب :

أ) $P(X > 90)$

ب) $P(X < 82)$

الحل : لابد من القيام بعملية تحويل قيم X الى قيم Z المعيارية المقابله لها .

أ) $Z = \frac{90-85}{2.5} = \frac{2}{2.5} = 2$

$$P(X > 90) = P(Z > 2) = 1 - P(Z < 2)$$
$$= 1 - 0.9772$$
$$= 0.0228$$

ب) $P(X < 82) = P(Z < -1.2)$

$Z = \frac{82-85}{2.5} = \frac{3}{2.5} = -1.2$ = مباشرة من الجدول

$$= 0.1151$$

مثال : تخضع تكاليف الولادة الطبيعية في المستشفيات في ما لتوزيع طبيعي وسطه *115* دولار و تباين *49* دولار .

ما احتمال ان تكوين تكاليف احدى الولادات الطبيعية ما بين *104* ، *122* دولار ؟

الحل : $X:N\ (\ 115\ ,\ 49\ )$

المطلوب : $\boldsymbol{P}(\mathbf{104} < X < 122)$ ؟

$$= P(X < 122) - P(X < 104)$$
$$= P\left(Z < \frac{122 - 115}{7}\right) - P\left(Z < \frac{104 - 115}{7}\right)$$
$$= P(Z < 1) - P(Z < -1.57)$$
$$= 0.8413 - 0.058$$
$$= 0.7831$$

المحاضرة العاشرة

الفصل الثالث : التوزيعات الاحتمالية المتصلة

١٢\ توزيع t : t- Distribution

ان احد التوزيعات الاحتمالية المتصلة الهامة لمتغير عشوائي متصل هو توزيع t .

تعريف : اذا كان توزيع الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي t

معطى بالمعادلة :

$$f(t) = c\left(1+\frac{t^2}{v}\right)^{-v+\frac{1}{2}}, -\infty < t < \infty$$

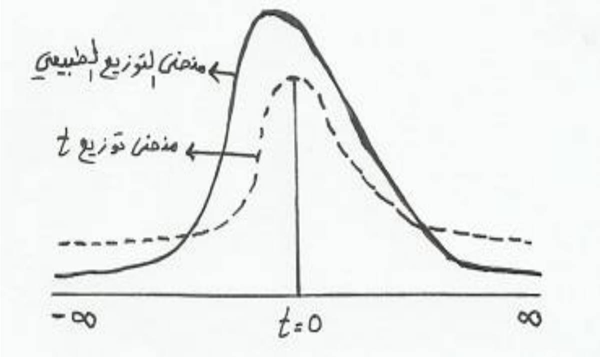
فان هذا التوزيع يسمى توزيع t حيث v درجات الحرية و c ثابت يعتمد على v ليجعل المساحة تحت المنحنى تساوي 1 .

خواص منحنى توزيع t :

١- يشبه منحنى توزيع t شكل الجرس ، وهو احادي المنوال له قيمه تقابل t=0 ، بحيث يتماثل منحنى الشكل حول العمود المقام على t .

٢- شكله يشبه شكل التوزيع الطبيعي المعياري ألا انه اكثر انخفاضاً منه ، بالاضافه الى ان تقارب طرفيه من الصفر عندما $t \to \infty, t \to -\infty$ ابطأ من تقارب منحنى التوزيع الطبيعي المعياري

و الشكل التالي يوضح منحنى التوزيع الطبيعي مع منحنى توزيع t :



ملاحظة : يعتمد منحنى توزيع t على معلمة هامة تحدد شكل ذلك المنحنى وهي درجات الحرية فعندما تزداد درجات الحرية يقترب منحنى توزيع t من التوزيع الطبيعي المعياري .

- **حساب الاحتمالات تحت توزيع t :**

تحسب الاحتمالات تحت توزيع t من خلال حساب المساحات المختلفة التي تقع على يسار قيم t بدرجات حرية مختلفة ، ويوجد جداول خاصة لهذه المساحات ويكون استعمال هذه الجداول كالتالي :

١- تسجل درجات الحرية v في العمود الايسر ، وعلى الخط الأفقي تسجل مساحات معينة λ ، اما داخل الجدول فتمثل قيم t التي تقع المساحة معينة على يسارها وتعبر عن قيمة t التي تقع على يسارها المساحة λ تحت منحنى توزيع t بدرجات حرية V بالرمز t [λ: V]

٢- ان جدول t يعطي قيم $t\,[\lambda; v]$ القريبة من 1 ، لهذا عندما تكون λ صغيرة مثل 0.05 ، 0.01 وغريها ، فأننا نستعمل القاعدة $t\,[\lambda;\ v] = -t\,[1-\lambda; v]$ وذلك بسبب تماثل توزيع t حول العمود المقام على الصفر .

مثال : المتغير العشوائي t يتبع لتوزيع t بدرجات حرية 4 ، اوجد

١) المساحة الواقعة على يسار 1.532 ؟

٢) ما هي قيمة t التي يقع الى يسارها المساحة 0.01 ؟

٣) قيمة √ بحيث $t\,[\lambda;\,] = -2.776$ ؟

الحل :

١) $t\,[\lambda; 4] = 1.531$

من جدول توزيع مباشرة

نجد ان $\lambda = 0.90$

٢) $t\,[0.01; 4] = ??$

$$t\,[0.01; 4] = -t\,[1-0.01,4]$$
$$= -t\,[0.99,4]$$
$$= -3.747$$

٣) $t\,[\lambda; 4] = -2.776$

من الجدول مباشرة ، نجد ان قيمة المساحة التي تحقق الشرط

$$t\,[\lambda; 4] = 2.776$$

هي $\lambda = 0.975$

وبسبب وجود اشارة السالب ، لابد ان اخذ المتممة من العدد 1 ، وبذلك فان قيمة λ التي تحقق الشرط

$$[\lambda; 4] = -2.776$$

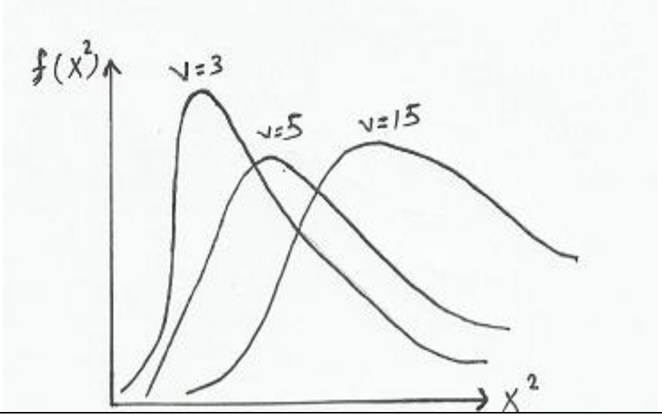
هي :- $\lambda = 1 - 0.975 = 0.025$

١٣ توزيع كاي تربيع :Chi – square Distritoution

تعريف : اذا كان توزيع الكثافة الاحتمالي للمتغير العشوائي x^2 معطى بالمعادلة :

$$\mathbf{f(x^2) = \ c\ (x^2)^{(v-2)/2}\ e^{-x\frac{2}{2}}}, \mathbf{x^2} > 0$$

فان هذا التوزيع يسمى توزيع كاي تربيع بدرجات حرية *v* حيث تعتمد *c* على *v* وتحدد تكون المساحة تحت المنحنى تساوي *1* .



لإيجاد المساحات تحت منحنى كاي تربيع أو ايجاد القيم التي تقع الى يسارها او الى يمينها مساحة معينة ، سنستخدم جدول كاي تربيع حيث يسجل عدد درجات الحرية في العمود الأيسر ، وتسجل المساحات التي تقع إلى يسار قيمة x^2 على الخط الافقي وتسجل قيم x^2 داخل جسم الجدول .

مثال : اذا كان المتغير العشوائي x^2 يخضع لتوزيع كاي تربيع على درجات حرية *10* ، اوجد :-

أ) قيمة ^{2} التي يكون على يسارها *0.99* من المساحة .

ب) قيمة x^2 التي يكون الى يمينها 0.01 من المساحة .

ت) قيمة x^2 التي يكون الى يسارها 0.975 و القيمة التي يكون الى يسارها 0.025 من المساحة ؟

الحل :

ملاحظة : نعبر عن قيمة المتغير العشوائي x^2 التي يقع على يسارها المساحة λ بدرجة حرية *v* تحت منحنى توزيع x^2 بالرمز .

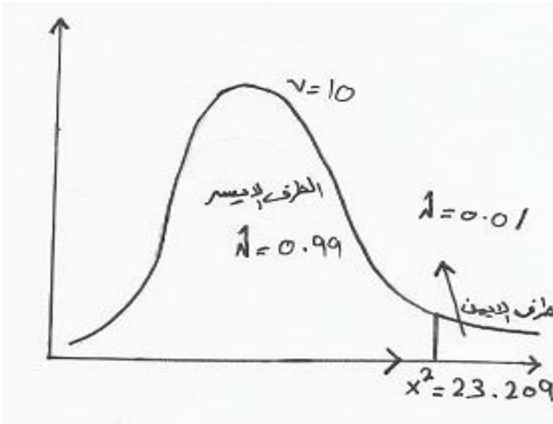
$$\boldsymbol{x^2\ [\lambda; v]}$$

أ) $x^2\ [0.99\ ; 10] = ??$

من الجدول مباشرة : $x^2 = 23.209$

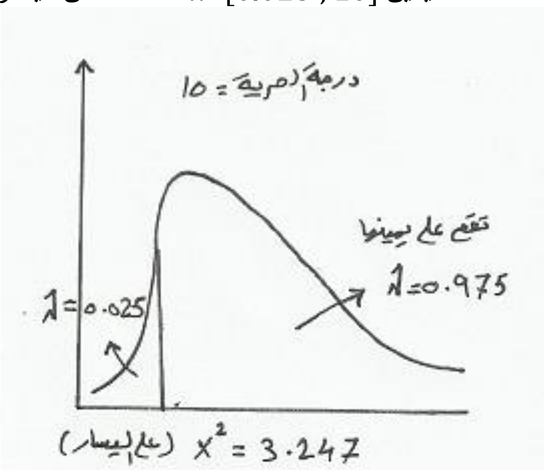
ب) قيمة x^2 التي يكون الى يمينها 0.01 من المساحة

لاحظوا ان المساحة التي تقع على يمين $0.01 = \lambda$ هي المساحة التي تقع على يسار $0.99 = \surd$ ، وبذالك فان قيمة $x^2 = 23.209$

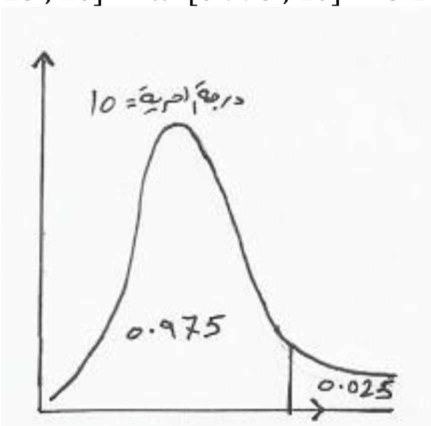


ت) $x^2[0.975\ ; 10] =$

المساحة اليمين $x^2[0.025\ ; 10]$ المساحة من اليسار



$\mathrm{x}^2[0.025\ ; 10] = \ x^2[0.975\ ; 10] = 3.247$



<u>تمرين :</u>

اذا كان المتغير العشوائي x^2 يخضع لتوزيع كاي بدرجة حرية v = 15 اوجد :

١) قيمة ^{2} التي تقع 0.99 من المساحة على يسارها ؟

٢) قيمة ^{2} التي تقع 0.01 من المساحة على يمينها ؟

المحاضرة الحادية عشر

الفصل الثالث: التوزيعات الاحتمالية المتصلة

٤- توزيع F: (The F-Distribution)

يعتبر توزيع F من التوزيعات الاحتمالية الهامة والتي تستعمل في اختبار الفرضيات (موضوع الباب السادس).

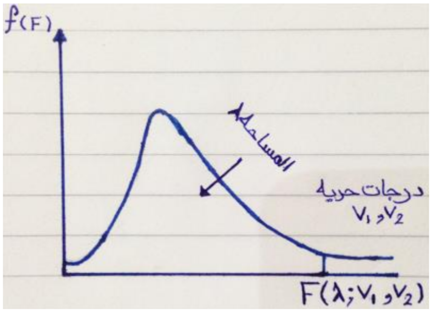
تعريف: إذا كان توزيع الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي F

$$f(F) = \frac{cF\ (v_1-2)/2}{(v_2+v_1F)^{(v_1+v_2)/2}}\ , F > 0$$

فإن هذا التوزيع يسمى توزيع F ويعبر عنه بالرمز $F(V_1, V_2)$ حيث أن V_1 , V_2 هي درجات الحرية و C هي ثابت يعتمد على V_1 , V_2 ويعين بحيث تصبح المساحة أسفل منحنى التوزيع تساوي ١.

يوجد لدينا في هذا التوزيع عدوان من الدرجة الحرية، وبما أن V_2 يظهر في المقام فقط فإنه يعتبر درجات الحرية، ويعتبر V_1 درجات حرية البسط ويظهر V_1 قبل V_2 في الرموز $F(V_1, V_2)$.

خواص منحنى توزيع F: منحنى توزيع F أحادي المنوال ملتوٍ قليلاً إلى اليمين، وكلما زادت درجات الحرية V_1 , V_2 يقترب منحنى توزيع F من منحنى التوزيع الطبيعي وهو موجب لجميع قيم F بين الصفر واللانهاية.



مثال: أوجدي ما يلي:

١- **F(0.95 ; 9.7)** ← معدل (٣,٦٤ ، ٣,٧٣)

← F = 3.68

٢- **F(0.99 ; 9.7)** ← معدل (٦,٦٢ ، ٦,٨٤)

← F = 6.73

وفي حال إيجاد قيم F إذا كانت المساحة على يسارها وقيم غير موجودة في الجدول (بمعنى قيم صغيرة) مثل $F(0.05 ; V_1, V_2)$ أو $F(0.01 ; V_1, V_2)$ ، ففي هذه الحالة تستخدم الصيغة التالية: $F(\lambda; V_1, V_2) = \frac{1}{F(1-\lambda; V_2, V_1)}$

مثال: **أوجدي قيمة ما يلي:**

1- F(0.05 ; 10 , 7) $= \frac{1}{F(1-0.05;7,10)} = \frac{1}{F(0.95;7,10)} = \frac{1}{3.14}$

2- F(0.01 ; 1 , 15) $= \frac{1}{F(0.99\ ;15\ ,1)} = \frac{1}{\frac{6056+6209}{2}}$

تمرين: أوجد المساحة إلى يسار F=3 إذا كانت $V_1 = 7$ ، $V_2 = 20$ ؟

أوجد المساحة λ بحيث $F(\lambda ; 5 , 5)$

نهاية الباب الثالث..

الباب الرابع: توزيعات المعانية

إحصاءات العينة: "Sample Statistics"

مقدمة: يخضع المجتمع الذي تؤخذ منه العينة لتوزيع معين وهو توزيع المجتمع حيث تسعى بالتوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي يمثل كأنة أفراد ذلك المجتمع.

أما إحصاء العينة فهو أي اقتران تتعين قيمة من العينة.

فمثلاً الوسط الحسابي للعينة هو $\frac{1}{x} = \frac{\sum_{i=0}^{n} x}{n}$

هو إحصاء عينة . حيث نلاحظ أن قيمة تتغير من عينه لأخرى. فمثلاً أذا أخذت عينة حجمها n بحيث كان لدينا $X_1, X_2, \ldots, X_n$ فإن هذه العينة تحدد قيمة ما للوسط الحسابي ،وإذا أخذت عينة عشوائية أخرى بتقسيم الحجم n فإن الوسط الحساب لهذا العينة ربما يتغير عن الوسط الحسابي للعينة الأولى وهكذا. وهذا يعني أن X فتتغير عشوائي تتغير قيمته بتغير العينة .

تعريف (١): المعلمة (parameter) هي ثابت يصف المجتمع أو يصف توزيع المجتمع كالوسط الحسابي للتوزيع أو الانحراف المعياري له.

تعريف (٢): إحصاء العينة (Sample Statistic) هو أي متغير تتعين قيمته من جميع العينات ذا حجم معين مأخوذه من مجتمع ما. وباختصار هو اقتران تتعين قيمته من العينة.

ومثال عليه: الوسط الحسابي للعينة X.

تعريف (٣): يسمى التوزيع الاحتمالي لإحصاء العينة توزيع المعاينة لذلك الإحصاء.

المحاضرة الثانية عشر (المباشرة الثانية)

الفصل الرابع: توزيعات المعاينة

توزيع المعاينة للوسط الحسابي $\overline{X}$:

نظرية (١): إذا كان X يخضع للتوزيع وسطه (معدله) M وتباينه س٢ وكان $\overline{X}$ يمثل الوسط الحسابي للعينة ذات الحجم n والمحسوبة من هذا المجتمع فإن:

١- توزيع $\overline{X}$ هو: $M_{\overline{X}} = M$

٢- تباين $\overline{X}$ هو: $س^2_{\overline{X}} = \frac{س^2}{n}$

شرطه أن السحب مع الارجاع.

مثال: سحبت عينة عشوائية من مجتمع لا نهائي معدله ٧٠ وتباينه ٤٠. إذا كان حجم العينة ١٠، فأوجد:

١- الوسط الحسابي للعينة.

$$M_{\overline{X}} = M = 70$$

٢- تباين العينة.

$$س^2_{\overline{X}} = \frac{س^2}{n} = \frac{40}{10} = 4$$

٣- الانحراف المعياري للعينة.

$$س^2_{\overline{X}} = \sqrt{4} = 2$$

توزيع المعاينة للوسط الحسابي $\overline{X}$ عند المعاينة من مجتمع طبيعي:

نظرية (٢): إذا كان $X_1, X_2, \ldots, X_n$ عينة عشوائية من مجتمع طبيعي وسطه (معدله) M وتباينه س٢ فإن توزيع $\overline{X}$ يكون التوزيع الطبيعي ذا الوسط M والتباين $\frac{س^2}{n}$ حيث أن المتغير العشوائي $Z = \frac{\overline{X}-M}{س/\sqrt{n}}$

يخضع لتوزيع طبيعي معياري.

مثال: تخضع علامات الطلاب في أحد المقررات لتوزيع طبيعي وسطه ٦٥ وانحراف معياري ١٨. اخذت عينة عشوائية حجمها ٣٦ طالب، احسب:

١- احتمال أن يزيد وسط علامات العينة على ٧٤؟

$P(\overline{X} > 74) = P(Z > \frac{\overline{X}-M}{س/\sqrt{n}}) = P(Z > \frac{74-65}{18/\sqrt{36}})$

$= P(Z > 3)$

$= 1 - P(Z < 3)$

$= 1 - 0.9987$

$= 0.0013$

٢- احتمال أن يقل وسط علامات العينة على ٦٠؟

$P(\overline{X} < 60) = O(Z < \frac{\overline{X}-M}{\frac{س}{\sqrt{n}}})$

$= P(Z < \frac{60-65}{18/\sqrt{36}})$

$= P(Z < -1.67)$

$= 0..475$

المحاضرة الثالثة عشر - توزيعات المعاينة

نظرية (٣): المعاينة من مجتمع طبيعي وسطه M وتباينه س٢ غير معلوم.

إذا اخذت عينة عشوائية من توزيع طبيعي وسطه M وتباينه س٢ غير وعلوم بحيث كان $\overline{M}$ (الوسط الحسابي للعينة) لعينة حجمها n وانحرافها المعياري s فإن المتغير: $T = \frac{\overline{X}-M}{s/\sqrt{n}}$

يخضع لتوزيع t بدرجات حرية v = n – 1

مثال: إذا كانت أطوال الطلاب في أحد الصفوف المدرسية تتبع التوزيع الطبيعي المتوسط يساوي ١٦٠سم، إذا سحبت عينة عشوائية من ٤ طلاب فما احتمال أن يقل متوسطها الحسابي عن ١٦٦سم، إذا علمت أن الانحراف المعياري للعينة يساوي ١٠سم؟

الحل: ? $P(\overline{X} < 166)$

$$T = \frac{\overline{X}-M}{s/\sqrt{n}} = \frac{166-160}{10/\sqrt{4}} = \frac{6}{5} = 1.2$$

$$P(t[\lambda,3]=1.2) = 0.90$$

نظرية (٤): توزيع المعاينة للفرق بين وسطي عينين $(\overline{X} - \overline{Y})$:

إذا اخذت عينة عشوائية حجمها n_1 من مجتمع طبيعي معدله M_1 وتباينه س٢، ثم اخذت عينة عشوائية اخرى حجمها n_2 من مجتمع طبيعي معدله M_2 وتباينه س٢ بحيث كان مستقل عن المجتمع الأول، ورمزنا للوسط الحسابي للعينة الأولى بالرمز $\overline{X}$ والوسط الحسابي للعينة الثانية $\overline{Y}$

فإن توزيع الفرق وسطي العينة بين $(\overline{X} - \overline{Y})$ يكون التوزيع الطبيعي ذا معدل $(M_1 - M_2)$ والتباين $\frac{س_1^2}{n_1} + \frac{س_2^2}{n_2}$ بحيث:

$$Z = \frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(M_1-M_2)}{\sqrt{\frac{س_1^2}{n_1}+\frac{س_2^2}{n_2}}}$$

يخضع للتوزيع الطبيعي المعياري

مثال: تخضع علامات الناجحين من امتحان الدراسة الثانوية العامة في احدى المدارس (أ) لتوزيع طبيعي معدله ٧٠ وانحرافه المعياري ١٢، وفي مدرسة ثانية (ب) تخضه العلامات للتوزيع الطبيعي معدله ٧٤ وانحرافه المعياري ١٦، اخذت عينة عشوائية حجمها ١٦ من المدرسة (أ) وعينة عشوائية اخرى حجمها ٩ من المدرسة (ب)، على فرض أن الوسط الحسابي للعينة الأولى $\overline{X}$، وللعينة الثانية $\overline{Y}$، أوجد:

أ- $\mathbf{P(\overline{Y} - \overline{X}) > 8}$?>احتمال الفرق بين وسطين عينين

ب- $\mathbf{P(\overline{X} - \overline{Y}) < 3}$ ؟

الحل: أ-

$$P[\frac{Z = (\overline{Y} - \overline{X}) - (M_1 - M_2)}{\sqrt{\frac{س_1^2}{n_1} + \frac{س_2^2}{n_2}}} > \frac{8-(74-70)}{\sqrt{\frac{(12)^2}{16} + \frac{(16)^2}{9}}}]$$

$$P(Z > \frac{8-4}{\sqrt{9-26.4}}) = P(Z > 0.65)$$

$$= 1 - P(z < 0.65)$$
$$= 1 - 0.7422$$
$$= 0.2578$$

ب- $P[\frac{Z=(\overline{Y}-\overline{X})-(M_1-M_2)}{\sqrt{\frac{س_1^2}{n_1}+\frac{س_2^2}{n_2}}} < \frac{3-(70-74)}{\sqrt{\frac{(12)^2}{16}+\frac{(16)^2}{9}}}$

$$P\left(Z < \frac{3-(-4)}{\sqrt{9+28.4}}\right) = P(Z < \frac{7}{\sqrt{37.4}})$$
$$= P(Z < 1.14)$$
$$= 0.8729$$

تمرين ومسائل:

سؤال (١): إذا كان لدينا المتغير العشوائي X والذي يتبع التوزيع الطبيعي ذا المعدل ٢٥ والتباين ٣٦، أجب عن الاسئلة التالية:

١- أوجد القيمة المعيارية المقابلة للعدد X=10 ؟

٢- أوجد القيمة المعيارية المقابلة للعدد $\overline{} = 10$ في حال كان لدينا عينة حجمها ١٦ ؟

٣- اوجد الوسط الحسابي للعينة إذا علمت أن n=25 ؟

٤- اوجد التباين الحسابي للعينة إذا علمت أن n=25 ؟

٥- أوجد الانحراف المعياري للعينة إذا علمت أن n=16 ؟

تمرين:إذا كان لدينا التوزيه الطبيعي X;N (10,25) والتوزيع الآخر Y;N (15,36)، سحبت عينة من المجتمع الأول حجمها ١٦، وسحبت عينة من المجتمع الآخر حجمها ٢٥، أوجد احتمال الفرق بين $(\overline{Y} - \overline{X})$ يقل عن العدد ٣ ؟

المطلوب: $[P(\overline{Y} - \overline{X}) < 3]$

المحاضرة الرابعة عشر

الفصل الخامس: التقدير Estimation

مقدمة: الاستنتاجات الاحصائية هي التعميمات والتوازن التي يمكن اتخاذها بناءً على معلومات او بيانات قمت بجمعها أو كانت متوفرة لديك. فمثلاً إذا ارادت شركة أدوية أن تسوق دواء ما ، فإنه يجب عليها أن تحصل على تصريح أولاً ويتم ذلك من خلال اثبات أن الدواء المنتج قد جُرِب واثبت جدوى استعماله، وهذا يعني ان عينة من المرضى قد استعملوا ذلك الدواء وحصلوا على نتائج ايجابية، وبذلك فإن الشركة بنت قرارها من خلال دراسة تلك العينة.

المثال السابق يوضح أنه من أهم فروح الاحصاء الاستنتاجي هو عمليتي التقدير واختبار الفرضيات. حيث نقوم في الفصل الخامس بدراسة مفهوم التقدير على أن يتم دراسة اختبار الفرضيات في الفصل السادس لاحقاً إن شاء الله.

أولاً: مفهوم التقدير:تتم عملية التقدير من خلال اختبار عينة عشوائية من مجتمع ما ومشاهدة مقررات تلك العينة ومن ثم حساب المقاييس المراد اجراءها وتعميم ذلك على المجتمع.

إن أي توزيع احتمالي يحتوى على معالم تحدد شكله على P (نسبة النجاح) ، n (عدد مرات اجراء التجربة)

أما في توزيع بواسون فيعتمد شكله على معلمة λ (معدل النجاحات في فترة زمنية معينة)

أما في التوزيع الطبيعي فيعتمد شكل ذلك التوزيع على M (المعدل) ، س (الانحراف المعياري – التباين س٢)

وعادة ما تكون هذه المعالم مجهولة، وفي هذه الحالة لا بد من تقدير هذه المعالم.

هناك طريقتان اساسيتان لتقدير معالم المجتمع المجهولة هما:

١- التقدير بنقطة. ٢- التقدير بفترة.

أولاً: التقدير بنقطة.

يمكن ايجاد تقديرات للمعالم الخاصة بالمجتمع من خلال البيانات المأخوذة من عينة عشوائية وذلك بحساب ما يسمى بالإحصاءات، فمثلاً في المجتمع الطبيعي يستخدم متوسط العينة العشوائية $\overline{X}$ كتقدير لمتوسط المجتمع M وكذلك الانحراف المعياري للعينة S يستخدم كتقدير للانحراف المعياري للمجتمع س.

في توزيع بواسون يستخدم الوسط الحسابي للعينة $\overline{X}$ كتقدير لمعدل عدد النجاحات في تجربة بواسون λ، ($\lambda = \overline{X}$)

أما في توزيع ذات الحدين فيستخدم الوسط الحسابي للعينة ¯¯ كتقدير لنسبة النجاح P ($P = \overline{X}$) ... وهكذا

وتسمى هذه التقديرات بالتقدير النقطي حيث أنها قيمة وحيدة محسوبة من العينة.

مثال: اخذت عينة عشوائية من مجتمع طبيعي (س٢ ,N(M فكانت قيمها ٥، ٣، ٧، ٤، ٦، أوجد تقديراً معدل المجتمع Mوتقديراًتباسن المجتمع س٢ ؟

الحل: ١- $M=\overline{X}$ (الوسط الحسابي للمجتمع تقديراً ويساوي الوسط الحسابي للعينة).

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} 6+4+7+3+5}{5} = \frac{25}{5} = 5$$

الوسط الحسابي للمجتمع تقديراً M=5

٢-س̄^{2} = س٢ (تباين المجتمع تقديراً يساوي تباين العينة).

$$س^2_{\overline{X}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_1 - \overline{X})^2}{n-1}$$

$$= \frac{(6-5)^2+(4-5)^2+(7-5)^2(3-5)^2+(5-5)^2}{4}$$

$$= \frac{1+1+4+4}{4} = \frac{10}{4} = 2.5$$

س٢= ٢،٥ (تباين المجتمع تقديراً يساوي ٢،٥)

س = $\sqrt{2.5}$ (الانحراف المعياري للمجتمع تقديراً يساوي ٢،٥)

مثال: في توزيع بواسون، قدِّر عدد النجاحات في فترة زمنية معينة (λ) بناءً على عينة عشوائية اعطت القيم التالية ٧، ٧، ٧، ٧ ؟

الحل: عدد النجاحات في فترة زمنية معينة (λ) تقديراً = الوسط الحسابي للعينة.

$$\overline{X} = 7 \rightarrow \lambda = 7$$

تمرين: إذا اخذت عينة عشوائية حجمها n=5 ، $\sum_{i=1}^{5} xi = 30$ مجتمع برنولي (أي ذات احدين (b(I,P) ، أوجد التقدير النقطي للمعلمة P ؟

المحاضرة الخامسة عشر - الفصل الخامس: التقدير

ثانياً: التقدير بفترة (Interred Estimation): من الصعب جداً الحصول على تقدير لمعلمة مجتمع ما دون الوقوع في الخطأ مهما كان هذا التقدير جيداً، ولذلك فإنه من المرغوب فيه إعطاء فترة معينة نتوقع أن تقع معلمة المجتمع بداخلها. إن مثل هذا النوع من التقديرات يسمى تقدير بفترة أو فترة ثقة ومع أنّ دقة التقدير تزداد بزيادة حجم العينة فأنه ليس هناك سبب يبرر إمكانية الحصول على تقدير يحدد معلمة المجتمع بدون خطأ. وسنتعرف في هذا البنت على ايجاد فترات الثقة للمعدل (الوسط الحسابي) μ، وفترات الثقة للنسبة P، وفترات الثقة للتباين س٢.

١- إيجاد فترات الوسط الحسابي μ:

نظرية (١): إذا أخذت عينة عشوائية حجمها n من مجتمع طبيعي (س٢ ,N(μ بحيث كانت س٢ معلومة فإن فترة % (1-x)100 للمعلمة μ هي:

$$(\overline{X} - Z_{1-\propto/2}\frac{س}{\sqrt{n}} , \overline{x} + Z_{1-\propto/2}\frac{s}{\sqrt{n}})$$

حيث ‾ : الوسط الحسابي للعينة، **$Z_{1\text{-}\propto/2}$:** هي القيمة على محور Z والتي تقع على يسارها مساحة $1\text{-}\propto/2$

فترات تفسير الثقة: تعتبر فترة الثقة من الأدوات القوية التي تعطي معلومات عن المعلمة المجهولة مثل (μ) باستعمال أسلوب العينة. وسيكون لدينا عدة أنواع دقة فترات الثقة منها ٩٠% ، ٩٥% ، ٩٨% وهذا ما نقصده بالرمز %(1-x)100 وسنكتفي بشرح فترة ٩٥% حيث أن البقية لها نفس السلوك.

١- مثل دراسة العينة وتسجيل المشاهدات وإيجاد قيمة الوسط الحسابي فإن $(\overline{X} - Z_{0.975}\frac{س}{\sqrt{n}} , \overline{X} + Z_{0.975}\frac{س}{\sqrt{n}})$

هي فترة نهايتها متغيران عشوائيان تحاول احتواء المجهولة μ.

٢- أن تفسير الاحتمال $(\overline{X} - Z_{0.975}\frac{س}{\sqrt{n}} , \overline{X} + Z_{0.975}\frac{س}{\sqrt{n}}) = 95\%$

أن التكرار النسبي لمحاولات المعاينة الكثيرة المتكررة يحدد أن ٩٥% من فترات الثقة ستحتوي المعلمة μ وأن ٥% منها لا تحويها.

(بمعنى إذا أخذنا ١٠٠ عينة عشوائية ذات الحجم n وفي كل مرة نحسب ‾ ونحسب فترة الثقة لها ، فإننا نتوقع بنسبة ٩٥% (٩٥ فترة) للوسط الحسابي μ.

مثال: عينة عشوائية حجمها n=25 ، أخذت من مجتمع طبيعي انحرافه المعياري س = ٤ فأعطت المعدل $\overline{X} = 60$. أوجد فترة ٩٨% ثقة الوسط المجتمع μ ؟

الحل: قبل البدء بتطبيق نص النظرية يجب أن نقوم بعملية التحويل

$1\text{-} \propto = 98\% \rightarrow 1\text{-} \propto/2 = ??$

$1 - \propto = 2\%$

$\propto/2 = 1\%$

$1 - \propto/2 = 99\%$

وبتعويض القيم المعطاه في السؤال نحصل على

$$(\overline{X} - Z_{1-\propto/2}\frac{س}{\sqrt{n}} , \overline{X} + Z_{1-\propto/2}\frac{س}{\sqrt{n}})$$

$$(60 - Z_{0.99}\frac{4}{\sqrt{25}} , 60 + Z_{0.99}\frac{4}{\sqrt{25}})$$

$$60 - 2.33 \times \frac{4}{5} , 60 + 2.33 \times \frac{4}{5}$$

$(58.14 , 61.86)$

ملاحظة: يمكن تطبيق النظرية السابقة من حال كان السحب من مجتمع غير طبيعي وذلك من خلال استخدام نظرية التقارب بشرط ان حجم العينة (n) سيكون كبيراً (n≥30) وبذلك سنتعرف على النظرية رقم (٢).

نظرية (٢): إذا أخذت عينة عشوائية حجمها n من مجتمع وسطه μ وتباينه س٢ بحيث كانت س٢ معلومة ، فإن فترة $\%(1\text{-}\propto)100$

ثقة للمعلمة μهي تقريباً: $(\overline{X} - Z_{1-\propto/2}\frac{س}{\sqrt{n}} , \overline{X} + Z_{1-\propto/2}\frac{س}{\sqrt{n}})$

بشرط أن $n \geq 30$

مثال: عينة عشوائية حجمها ١٠٠ من مجتمع تباينه ٢٥ ، أعطيت الوسط الحسابي ٥٢ ، اوجد فترة ٩٨% ثقة الوسط الحسابي μ ؟

الحل: المعطيات n=100 ، س٢=٢٥ ، $\overline{X}$=52

$1\text{-}\propto = 98\% \rightarrow 1\text{-}\propto/2 = 99\%$

وبتطبيق النظرية (٢) نحصل تقريباً على:

$(52 - Z_{0.99} \times \frac{5}{10} , 52 + Z_{0.99} \times \frac{5}{10}$

$(52 - 2.33 \times \frac{1}{2} , 52 + 2.33 \times \frac{1}{2})$

$(50.84 , 53.16)$

تمرين: اعتماد على المثال الأخير، أوجد فترة ٩٥% نقطة الوسط الحسابي μ ؟ ثم أوجد فترة ٩٠% ثقة الوسط الحسابي μ؟

المحاضرة السادس عشر
الفصل الخامس: التقدير

نظرية (٣): إذا أخذت عينة عشوائية حجمها n من مجتمع طبيعي تباين غير معلوم فإن فترة 100(1-x)% ثقة للوسط μ هي:

$$(\overline{X}-t\left[1-\frac{\propto}{2},n-1\right]\frac{s}{\sqrt{n}},\overline{X}+t[a-\frac{\propto}{2},n-1]\frac{s}{\sqrt{n}}$$

حيث S: الانحراف المعياري للعينة.

مثال: أخذت عينة عشوائية حجمها ١٥ من مجتمع طبيعي فأعطت $\overline{X}=17.4$, $S = 2.1$. أوجد فترة ٩٥% ثقة للوسط الحسابي μ ؟

الحل: نقوم بعملية التحويل $1-\propto = 95\%$

$\propto = 5\%$

$\propto/2 = 2.5\%$

$1-\propto/2 = 97.5\% = 0.965$

$(17.4 - 2.145 \times \frac{2.1}{\sqrt{15}} , 17.4 + 2.145 \times \frac{2.1}{\sqrt{15}})$

(16.24 , 18.56) ← فترة ثقة للوسط الحسابي للمجتمع ٩٥%

بإمكاننا استخدام الأسلوب السابق في بناء فترات الثقة للوسط الحسابي لأكثر من مجتمع وذلك بالاستعانة بالنظرية التالية:

نظرية (٤): (فترات الثقة للفرق بين وسطين)

إذا كانت $X_1 , X_2 , \dots X_n$ **عينة عشوائية من مجتمع طبيعي** $N(\mu_1 , س_1^2)$ ، **وكانت** $Y_1 , Y_2 , \dots Y_n$ **عينة عشوائية أخرى من مجتمع طبيعي** $N(\mu_2 , س_2^2)$ مستقل عن الأول ، بحيث كانت $س_1^2$ ، $س_2^2$ معلومتين فإن هذه الثقة $100(1-\propto)\%$ للفرق بين الوسطين (M_1 , M_2) هي:

$$[(\overline{X}-\overline{Y})\ Z_{1-\propto/2}\sqrt{\frac{س_1^2}{n_1}+\frac{س_1^2}{n_2}},(\overline{X}-\overline{Y})\ Z_{1-\propto/2}\sqrt{\frac{س_1^2}{n_1}+\frac{س_1^2}{n_2}}$$

مثال: أخذت عينة عشوائية حجمها ٩ من مجتمع طبيعي $N(M_1 , 25)$ ثم أخذت عينة عشوائية حجمها ١٠ من مجتمع طبيعي $N(M_2 , 40)$ مستقل عن الأول، فإذا أعطيت العينة الأولى وسطاً حسابياً = ٣٢ ، بينما أعطيت العينة الثانية وسطاً حسابياً = ٤٧ أوجد:

أ- فترة ثقة ٩٥% للفرق بين الوسطين $(M_1 - M_2)$ ؟

ب- فترة ثقة ٩٠% للفرق بين الوسطين $(M_2 - M_1)$ ؟

الحل: المعطيات:

المجتمع الأول	المجتمع الثاني
$س_1^2 = 25$	$س_2^2 = 40$
$n_1 = 9$	$n_2 = 10$
$\overline{X} = 32$	$\overline{Y} = 74$

المطلوب: أ- فترة ٩٥% ثقة للفرق $M_1 - M_2$ ؟

$1-\propto = 95\% \rightarrow 1-\propto/2 = 97\%$

وبتطبيق نص النظرية نجد أن:

$$[(32-47) - Z_{0.975}\times\sqrt{\frac{25}{9}+\frac{40}{10}},(32-47)+Z_{0.975}\sqrt{\frac{25}{9}+\frac{40}{10}}]$$

$$(-15 - 1.96\times\sqrt{\frac{25}{9}+4} , -15 - 1.96\times\sqrt{\frac{25}{9}+4})$$

(-20.1 , -9.9)

$\overline{X} - \overline{Y} = 32 - 47$

$= -15$

ب- فترة ثقة 90% للفرق بين $M_1 - M_2$ ؟

$1-\propto = 90\% \rightarrow 1-\propto/2 = 95\%$

وبتطبيق نص النظرية نجد أن:

$$[(47-32) - Z_{0.95}\times\sqrt{\frac{25}{9}+\frac{40}{10}},(47-32)+Z_{0.95}\sqrt{\frac{25}{9}+\frac{40}{10}}]$$

$$(15 - 1.64\times\sqrt{\frac{25}{9}+4} , 15 + 1.64\times\sqrt{\frac{25}{9}+4})$$

(10.73 , 19.27)

$\overline{X} - \overline{Y} = 15$

نظرية (٥): إذا كان $\overline{P} = X/n$ نسبة النجاح في عينة عشوائية حجمها n وكان n كبيراً ، فإن فترة $100(1-\propto)\%$ ثقة التقريبية لنسبة النجاح P هي:

$$(\overline{P} - Z_{1-\propto/2}\sqrt{\frac{\overline{P}(1-\overline{P})}{n}},(\overline{P} - Z_{1-\propto/2}\sqrt{\frac{\overline{P}(1-\overline{P})}{n}})$$

مثال: لإيجاد فترة ٩٥% ثقة لنسبة عدد طلاب أحد المدارس الأساسية الذين لديهم ضعف في البصر، أخذت عينة عشوائية حجمها ١٠٠ طالب ووجد أن من لديهم ضعف في البصر كان ١٥ طالب. أوجد فترة الثقة المطلوبة ؟

الحل: $1 - X = 95\% \rightarrow 1 - X/2 = 975\%$

وأيضاً يجب إيجاد $\overline{P}$: (التقطير النقطي لنسبة النجاح)

$$\overline{P} = \frac{15}{100} = 0.15$$

وبتطبيق نص النظرية نجد أن:

$$\left(0.15 - Z_{0.975} \times \sqrt{\frac{0.15(0.85)}{100}} , 0.15 + 1.96 \times \sqrt{\frac{0.15(0.85)}{100}} \right)$$

$$(0.08 , 0.22)$$

$$\overline{P} = 0.15$$

نظرية (٦): إذا كانت $X_1 , X_2 , \dots X_n$ عينة عشوائية من مجتمع برنولي $b(1 . P_2)$ وكانت $Y_1 , Y_2 , \dots Y_n$ عينة عشوائية أخرى مستقلة عن الأولى من مجتمع برنولي $b(1 . P_2)$ ، فإن فترة $100(1 - X)\%$ ثقة للفرق بين النسبتين $(P_1 - P_2)$ هي:

$$\left[(\overline{P}_1 - \overline{P}_2) - Z_{1-X/2} \sqrt{\frac{\overline{P}_1(1-\overline{P}_1)}{n_1} + \frac{\overline{P}_2(1-\overline{P}_2)}{n_2}} , \overline{P}_1 - \overline{P}_2) - Z_{1-X/2} \sqrt{\frac{\overline{P}_1(1-\overline{P}_1)}{n_1} + \frac{\overline{P}_2(1-\overline{P}_2)}{n_2}}\right]$$

٢- تقدير النسبة:

إن تقدير النسبة بفترة هو عبارة عن إيجاد تقدير نقطي لنسبة النجاح في المجتمع P ثم إيجاد توزيع المعاينة لذلك المقدر واستعمال هذه المعلومات لإيجاد فترة ثقة ذات معامل ثقة معينة تحصر نسبة النجاح P بداخلها والنظرية التالية توضح ذلك.

مثال: أخذت عينة عشوائية حجمها ١٠٠ طالبة من المدرسة (أ) ، ووجد أن ٢٧ طالبة لديهم تسوس في الأسنان ، ثم أخذت عينة عشوائية أخرى من المدرسة (ب) ووجد أن ٢١ طالباً لديهم تسوس في الأسنان. أجد فترة ٩٥% ثقة للفرق بين (P_2 , P_1) ؟

الحل: (P_1 , P_2) $1- X = 95\% \rightarrow 1 - X/2 = 97.5\%$

$\overline{P}_1 = \frac{27}{100} = 0.27$	$\overline{P}_2 = \frac{12}{80} = 0.15$

حسب النظرية السابقة نجد أن:

$$\left[(0.27 - 0.15) - Z_{0.975} \times \sqrt{\frac{0.27(0.83)}{100} + \frac{0.15(0085)}{80}} , (0.27 - 0.15) - Z_{0.975} \times \sqrt{\frac{0.27(0.83)}{100} + \frac{0.15(085)}{80}}\right]$$

$$(0.003 , 0.237)$$

$$\overline{P}_1 - \overline{P}_2 = 0.27 - 0.15 = 0.12$$

المحاضرة السابعة عشر (المباشرة الثالثة)

الفصل الخامس : التقدير

فترات الثقة للتباين.

نظرية (٧): إذا كانت $X_1 , X_2 , \dots , X_n$ عينة عشوائية من توزيع طبيعي (س ٢ , N(M فإن فترة %(∝ - 1)100 ثقة للتباين س ٢ هي:

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{X^2\,[1-\propto/2\,;n-1]}\,,\,\frac{(n-1)S^2}{X^2\,[\propto/2\,;n-1]}\right)$$

حيث S^2: هو تباين العينة .. n: حجم العينة

ولإيجاد فترة الثقة للانحراف المعياري ، نأخذ الجذر التربيعي لطرفي فترة الثقة للتباين.

مثال: عينة عشوائية حجمها ٢٠ أخذت من مجتمع طبيعي (س ٢ , N(M فأعطت التباين $S^2 = 15$ ، أوجد فترة ٩٠% ثقة للتباين س ٢ ؟

الحل $1 - \propto = 90\%$

$\propto = 10\%$

$\propto/ 2 = 5\% = 0.05$

$1 - \propto/ 2= 1 – 0.05 = 0.95$

من جدول توزيع كاي تربيع نجد أن:

$x^2 [0.05 , 19] =$

$x^2 [0.05 , 19] =$

وحسب النظرية السابقة ، فإن فترة الثقة هي:

$$\left[\frac{19\times15}{30.144}\,,\,\frac{19\times15}{10.117}\right]$$

أما فترة ٩٠% ثقة الانحراف المعياري فهي

$$[\sqrt{9.45}\,,\sqrt{28.17}\,]$$

$$= [3.07 , 5.31]$$

فترات الثقة للنسبة بين تباينين.

نظرية (٨): إذا كانت $X_1 , X_2 , \dots , X_n$ عينة عشوائية من (س ٢ ١ , N(M وكانت $Y_1 , Y_2 , \dots , Y_n$ عينة عشوائية من (س ٢ ٢, N(M مستقل عن المجتمع الأول ، فإن فترة %(∝ - 1)100 ثقة النسبة $\frac{س_2^2}{س_1^2}$ هي:

$$\left(\frac{S_2^2}{S_1^2}F\,[\propto/2\,;\,n_1-1\,,\,n_2-1]\,,\,\frac{S_2^2}{S_1^2}F\,[1-\propto/2\,;\,n_1-1\,,\,n_2-1]\right]$$

مثال: أخذت عينة عشوائية حجمها $n_1 = 9$ من مجتمع $N($ س$_1^2$, $_1)$ فأعطت التباين $S_1^2 = 65.4$ وأخذت عينة عشوائية أخرى حجمها $n_2 =$ 11 من مجتمع طبيعي $N(M_1$, س$_1^2)$ مستقل عن الأول فأعطت التباين $S_2^2 = 127.3$. أوجد قيمة الفترة ٩٠% ثقة للنسبة $\frac{س_2^2}{س_1^2}$ ؟

الحل: $1 - \propto = 90\%$

$\propto = 10\%$

$\propto/ 2 = 5\% = 0.05$

$1 - \propto/ 2= 1 – 0.05 = 0.95$

من جدول توزيع F نجد أن:

$$F[\,0.05\,;\,8\,,\,10\,] = \frac{1}{F\,[\,0.95\,;10\,,8]}$$

$$= \frac{1}{3.35} = 0.3$$

$$F\,[\,0.95\,;\,8\,,\,10\,] = 3.07$$

ومن صيغة القانون للنظرية السابقة نجد أن:

$$\left[\frac{127.3}{65.4}\times 0.3\,,\,\frac{127.3}{65.4}\times 3.07\,\right]$$

$$[\,0.583\,,\,5.98\,]$$

أمثلة:

١- أخذت عينة عشوائية حجمها ٤٠٠ من معلمي المرحلة الإعدادية فوجد أن ٨٠ منهم حاصلون على شهادة البكالوريوس:

أ- قدر نسبة المعلمين في المرحلة الإعدادية الحاصلين على شهادة البكالوريوس.

ب- أوجد فترة ٩٩% ثقة للنسبة الحقيقية للمعلمين في هذه المرحلة الحاصلين على شهادة البكالوريوس؟

الحل: نقدر نسبة المعلمين لهذه المرحلة كما يلي:

النسبة $= \frac{80}{400} =$ ٠,٢

(لاحظ أم $\overline{P} = \frac{X}{n}$) . التقدير النقطي لنسبة النجاح P هي $\overline{P}$

ب- من خلال استخدام النظرية رقم (٥) نجد أن:

$$(0.2 - Z_{0.995} \sqrt{\frac{0.2\,(1-0.2)}{400}} , 0.2 + Z_{0.995} \sqrt{\frac{0.2\,(1-0.2)}{400}})$$

$$(0.2 - 2.58 \times 0.02 , 0.2 + 2.58 \times 0.02)$$

$$(0.148 , 0.252)$$

٢ - نتج احد المصانع مصابيح كهربائية تخضع أعمارها تقريبا لتوزيع طبيعي انحرافه المعياري ٣٥ ساعة .

أخذت عينه عشوائية حجمها ٢٥ مصباحا فكان الوسط الحسابي لأعمار هذه المصابيح ٨٩٠ ساعة .

أوجد فترة ٩٨% ثقة لمعدل أعمار المصابيح !

الحل : لاحظ ان :

س=٣٥ ، n=25 ، ×= 890

من نظرية رقم ١ ، نلاحظ أن :

$$(\overline{X} + Z_{1-\propto/2} \frac{س}{\sqrt{n}} ، \overline{X} + Z_{1-\propto} \frac{س}{\sqrt{n}})$$

$$(890 - Z_{0.99} \times \frac{35}{\sqrt{25}} ، 890 + Z_{0.99} \times \frac{35}{\sqrt{25}})$$

$$(890 - 2.33 \times 7 ، 890 + 2.33 \times 7)$$

$$(890 - 16.31 ، 890 + 16.31)$$

$$(873.69 ، 956.31)$$

٣- اعتمادا على السؤال السابق ، اذا كان تباين المجتمع غير وكان الانحراف المعياري يساوي 17 للعينة .

أوجد فترة ٩٨% ثقه لمعدل أعمار المصابيح !

الحل: نلاحظ ان جميع المعطيات شبيهه بالمثال السابق باستثناء ان الانحراف المعياري قد اصبح معطى للعينة وليس لمجتمع حجم العينة وفي هذه الحاله فإننا بدلا من ان نستخدم جداول التوزيع الطبيعي المعياري ، فإننا في هذه الحاله نستخدم جداول توزيع t وبالتالي يصبح الحل على الصورة :

من نظرية رقم (٣) :

$$(\overline{X} - t\,[\,1-\propto/2 , n-1\,] \frac{s}{\sqrt{n}} ، \overline{X} + t\,[\,1-\propto/2 , n-1\,] \frac{s}{\sqrt{n}})$$

$$(890 - t\,[\,0.99 ، 16\,] \times \frac{35}{\sqrt{16}} ، 890 + t\,[\,0.99 ، 16\,] \times \frac{35}{\sqrt{16}})$$

$$(890 - 2.602 \times \frac{35}{4} ، 890 + 2.602 \times \frac{35}{4})$$

$$(890 - 22.77 ، 890 + 22.77)$$

ملاحظات :

عند ايجاد فترات التقدير للوسط الحسابي للمجتمع M نلاحظ أن :

1. **اذا كان السحب من مجتمع طبيعي تباينه معلوم فإننا نستخدم جداول التوزيع الطبيعي المعياري .**
2. **اذا كان السحب من مجتمع ما تباينه معلوم فإننا نستخدم ايضا جداول التوزيع المعياري بشرط n >-30**
3. **اذا كان السحب من مجتمع تباينه غير معلوم فإننا نستخدم جداول توزيع t**
4. **في حال السؤال عن التقدير للنسبة سواء لمجتمع واحد او مجتمعين فإننا نستخدم جداول التوزيع الطبيعي**
5. **في حال السؤال عن التقدير للتباين :**
   - **أ- اذا كان السؤال عن مجتمع واحد ، فإننا نستخدم توزيع كاي تربيع**
   - **ب- اذا كان السؤال عن النسبه بين تباين مجتمعين فإننا نستخدم توزيع F**

المحاضرة الثامنة عشر

الفصل السادس : اختبار الفرضيات

مقدمة :

تصادفنا العديد من المشاكل في حياتنا اليومية و يجب اخذ قرار ملائم بشأن تلك المشاكل ، وبما ان اغلب الدراسات هي مستمدة من العينة المسحوبة من المجتمع ، نبعد التقدير للمعالم المختلفة لذالك المجتمع فانه علينا ان نعطيها المزيد من الثقة ، لذا لابد من اتخاذ قرار حول صحة فرضية معينة او عدم صحتها . وتسمى هذه الطريقة باختبار الفرضيات ولاتخاذ القرار الاحصائي يجب النظر الى الفروض الاحصائية اولاً وبناءً عليه لابد من توضيح بعض المفاهيم المتعلقة بها كالأتي :

- **الفرضية الاحصائية :**

تعريف : الفرضية الاحصائية هي كل عبارة عن احدى معالم المجتمع او عدة معالم تكون قابلة للاختبار و بالتالي تكون صحتها او عدم صحتها بحاجة الى قرار . وبصورة عامة تتعلق الفرضيات الاحصائية بعبارة عن احدى معالم المجتمع مثل الوسط الحسابي او نسبة النجاح او التباين او غيرها ، او عدة معالم مثل المقارنة بين معلمين او اكثر .

في الغالب هناك عنوان من الفرضيات الاحصائية في المسألة الواحدة :

١- **الفرضية الصفرية (الابتدائية) :** وهي الفرضية التي تبنى على امل ان يتخذ قرار بعدم صحتها ، ونصطلح من الآن على اعتبار أي فرضية نود اختبارها بالفرضية الصفرية ويتم التعبير عنها بالرمز H_0 .

٢- **الفرضية البدليه :** وهي الفرضية البدليه للفرضية الصفرية في حال عملية الرفض للفرضية الصفرية يتم قبول الفرضية البدليه و يرمز لها بالرمز H_1 .

مثال : يدعي احد المصانع في فترة المواصفات للمصابيح الكهربائية التي ينتجها ان معدل عمر المصابيح هو 500 ساعة للمصباح الواحد . اردت اختبار هذا الادعاء ، اكتب الفرضية الصفرية و الفرضية البدليه ؟

الحل : نفرض ان معدل عمر المصابيح التي ينتجها ذالك المصنع بالرمز µ

اذن تصبح الفرضية الصفرية على الصورة :

$$H_0: M = 500$$

اما الفرضية البدليه فتعتمد على الحالة المتوقعة التي تريد اجراء الاختبار من اجلها . فمثلاً اذا كنت تريد اختبار H0 بغرض الشراء من ذلك المصنع فأننا نصوغ الفرضية البدليه على الشكل :

$$H_1: M > 500$$

(لاحظ ان الفرضية البدليه لم يعين قيمة محددة للوسط الحسابي M ، بل سمحت بفترة من القيم جميعها اكبر من العدد 500 **) .**

الاخطاء الناتجة عن عملية صياغة الفرضيات :

كل قرار يبني على ناتج عينة ما يكون معرضاً للخطأ ، نعتمد صياغة الفرضية فان طريقة اتخاذ القرار قد تؤدي الى الوقوع في نوعين من الأخطاء هي :

١- **الخطأ من النوع الاول :** حيث يحدث هذا النوع في حال تم رفض الفرضية الصفرية وهي في الواقع صحيحة ، ويعبر عنه بالرمز $\propto$

٢- **الخطأ من النوع الثاني :** ويحدث هذا النوع في حال عدم رفض الفرضية الصفرية وهي في الواقع خاطئة ، ويعبر عن هذا الخطأ بالرمز β

و الجدول التالي يوضح ذالك :

الحالة الحقيقية		
H_1 صحيحة	**H_0 صحيحة**	
خطأ من النوع الثاني β	قرار صائب	**عدم رفض $_0$**
قرار صائب	خطأ من النوع الاول $\propto$	**رفض H_0**

وفي هذا الباب ، سيتم التعامل مع النوع الأول فقط من الاخطاء ($\propto$) حيث سيتم تسميته **بمستوى الدلاله** .

خطوات اختبار الفرضيات :

الخطوى الأولى : تحديد توزيع المجتمع .

يجب اولاً معرفة فيما اذا كان المتغير العشوائي يتوزع توزيعاً طبيعياً ، او يتبع توزيع ذو الحدين او غيره من التوزيعات الاخرى حيث تعتبر هذه نقطة مهمة في عملية اتخاذ القرار الملائم . وبما ان معظم التوزيعات تقترب من التوزيع الطبيعي و خاصة اذا كانت العينات كبيرة فلذالك سنستند في اختبار الفرضيات على التوزيعات الطبيعية في الغالب .

الخطوة الثانية : صياغة الفرضيات .

يتم صياغة الفرضيات الصفرية H0 و المراد اختبارها والتي تعتمد على تحديد قيمة المعلمة للمجتمع بحيث تكون على الشكل التالي :

$$H_0: M = M_0$$

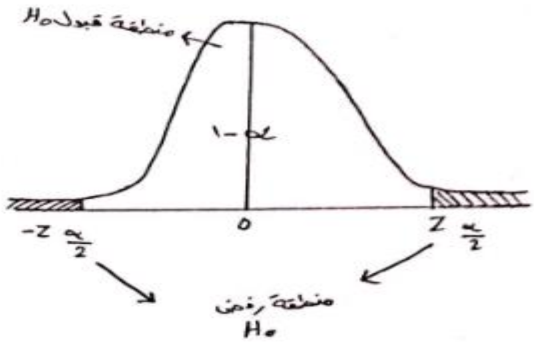
حيث M_0 تمثل قيمة معينه لهذا المتوسط

اما الفرضية البدليه ، فتأتي على احد الاشكال التالية :

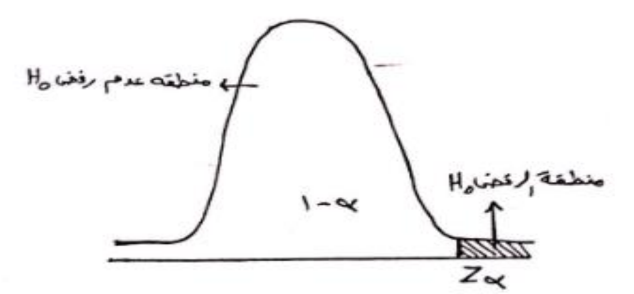
أ) $H_1: M \neq M_0$

حيث يسمى هذا الاختبار بالاختبار من طرفين .

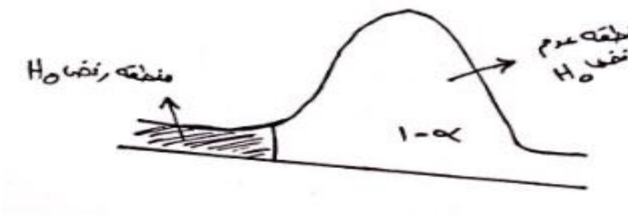
ب) $H_1: M > M_0$
ويسمى اختبار من جهة اليمين .
ت) $H_1: M < M_0$
ويسمى اختبار من جهة اليسار .
الخطوة الثالثة : اختبار مستوى الدلاله $\propto$.
يتم من خلال هذه الخطوة تحديد قيمة $\propto$ والتي من خلال سيتم تحديد منطقة القبول ومنطقة الرفض للحالات الثلاث التي تم ذكرها (الفرضية البدليه) والإشكال التالية توضح ذالك :
اولاً : اختبار الفرضيات من جهتين .



ثانياً : اختبار الفرضيات من الطرف الأيمن :



ثالثاً : اختبار الفرضيات من الطرف الايسر :



الخطوة الرابعة : احصاء الاختبار (دالة الاختبار) .
وهي الاحصاء المحسوب قيمته من العينة حيث يتم مقارنة هذا الاحصاء الذي تم جمعه من عينه مسحوب من مجتمع ما مع القيمة الجدوليه على مستوى دلالة $\propto$ معين لتحديد منطقة القبول او منطقة الرفض .
الخطوة الخامسة : اتخاذ القرار .
وهي عملية رفض الفرضية الصفرية او قبولها بناءً على عملية مقارنة بين احصاء الاختبار مع منقطة الرفض ، فإذا وقعت دالة الاختبار في منطقة الرفض فأننا نرفض H0 وندعم H1 اما في حال وقوع دالة الاختبار في منطقة القبول فأننا ندعم H0 ونهمل H1

المحاضرة التاسعة عشر
اختبار الفرضيات

اختبار الفرضيات المنطقة بالوسط الحسابي :

نظرية (١) : اذا اخذت عينة عشوائية حجمها n من مجتمع طبيعي ($س^2$ ، H) N بحيث كان التباين ($س^2$) معلوم ، فان احصاء الاختبار (دالة الاختبار) للفرضية المبدئية $H_0: M = M_0$ هو $Z = \frac{\overline{X} - M_0}{س\backslash\sqrt{h}}$ يخضع للتوزيع الطبيعي المعياري حيث $\overline{X}$ هو الوسط الحسابي للعينة ،

بحيث تتم خطوات الاختبار على النحو الآتي :

١) اختبر الفرضية $H_0: M = M_0$
٢) مقابل الفرضية البدليه
أ) $H_0: M \neq M_0$
ب) $H_0: M > M_0$
ت) $H_0: M < M_0$
٣) مستوى الدلالة $\propto$
٤) دالة الاختبار : تحت فرض ان H_0 صحيحة فان احصاء الاختبار هو $Z = \frac{\overline{X} - M_0}{\sigma\backslash\sqrt{h}}$ يخضع لتوزيع طبيعي معياري
٥) القيم الحرجة ومنطقة الرفض :
أ) ارفض الفرضية المبدئية H_0 اذا كان

$$Z > Z_{1-\frac{\propto}{2}} \quad \text{أو} \quad Z < Z_{\frac{\propto}{2}}$$

ب) ارفض H_0 اذا كان
الجداول من الاحصائية $Z > Z_{1-\propto}$ دالة الاختبار من رقم ٤
ت) ارفض H_0 اذا كان
الجداول من الاحصائية $Z < Z_{\propto}$ دالة الاختبار من رقم ٤

مثال : تخضع اوزان عبوات احد مساحيق الغسيل لتوزيع طبيعي انحرافه المعياري 7 غم و معدلة M غم ، على مستوى الدلاله $\propto = 0.05$ اختبر الفرضية :

$$\mathbf{H_0: M = 50}$$

مقابل الفرضية البدليه

$$\mathbf{H_1: M \neq 50}$$

اذا علمت ان الوسط الحسابي لعينه حجمها ١٢ علبة هو $\overline{X}$=56 غم .

الحل : اولاً يجب ايجاد قيمة دالة الاختبار

$$Z = \frac{\overline{X} - M_0}{\sigma\backslash\sqrt{h}} = \frac{56 - 50}{7\backslash\sqrt{12}} = 2.97$$

عملية المقارنة وتحديد المنطقة الحرجة :

$Z_{\propto}$, $Z_{1-\frac{\propto}{2}}$ ؟؟

$Z_{1-\propto} = Z_{1-0.05} = Z_{0.95}$ لن يتم الاستفادة منها في هذا المثال

$$Z_{1-\frac{\propto}{2}} = Z_{1-\frac{0.05}{2}} = Z_{0.975}$$

$$Z_{\frac{\propto}{2}} = Z_{0.025}$$

من الجداول الاحصائية نجد ان :

$$Z_{0.975} = 1.96 \quad , \quad Z_{0.025} = -1.96$$

ارفض H_0 اذا كان :

$$Z = 2.97 > Z_{0.975} = 1.96$$

القرار : نرفض H_0 وندعم H_1

نظرية (٢) : (اختبار الفرضيات المتعقلة بالوسط الحسابي لمجتمع طبيعي تباينه غير معلوم وحجم العينه صغير)

اذا اخذت عينة عشوائية حجمها n من مجتمع طبيعي ($س^2$, N(M بحيث كان التباين غير معلوم ، فان حالة الاختبار هي $T = \frac{\overline{X} - M_0}{S\backslash\sqrt{n}}$.

تخضع توزيع t بدرجات حرية n-1 ، وتتم خطوات الاختبار على النحو الآتي :

١. $H_0: M = M_0$
٢. مقابل البدليه
أ) $H_1: M \neq M_0$
ب) $H_1: M > M_0$

ت) $H_1: M < M_0$

٣. مستوى الدلالة $\propto$

٤. احصاء الاختبار

$. \; T = \frac{\overline{X} - M_0}{S \backslash \sqrt{n}}$

اتخاذ القرار ومناطق الرفض :

أ) ارفض H_0 اذا كان

$T < -t\left[1 - \frac{\propto}{2}, n - 1\right]$ او $T > t\left[1 - \frac{\propto}{2}, n - 1\right]$

ب) ارفض H_0 اذا كان

$T > t[1 - \propto, n - 1]$

ت) ارفض H_0 اذا كان

$T < -t[1 - \propto, n - 1]$

مثال : اظهرت سجلات احدى المدارس ان معدل تحصيل الطلبة في امتحان الغة الانجليزية الذي يتقدمون له عند الالتحاق بالجامعات الامريكية هو 410 . بدأت المدرسة بإعطاء دورات تقوية للطلبة . اختبر فرضية ان هذا المعدل قد تحسن اذا اعطت نتائج 14 طالباً وسطاً حسابياً مقداره $\overline{X} = 418$ بانحراف معياري S= 21 ؟

(اعتبر مستوى الدلاله $\propto = 1\%$) .

الحل : ١) $H_0: M = 410$

٢) $H_1: M > 410$

٣) $. \; T = \frac{\overline{X} - M_0}{S \backslash \sqrt{n}}$

$$= \frac{418 - 410}{21\sqrt{14}} = 1.42$$

٤) عملية المقارنة واتخاذ القرار :

$T < -t[1 - \propto, n - 1]$

$1.42 > t[0.99,13]$

$1.42 > 2.65$

نلاحظ ان المتباينة غير صحيحة (بمعنى ان دالة الاختبار لم تقع في منطقة الرفض)

وبذلك فأننا ندعم H_0 ونهمل H_1 (لانستطيع ان نستنتج ان معدل تحصيل الطلبة قد تحسن بعد اعطاء الدورات)

المحاضرة العشرون

الفصل السادس : اختبار الفرضيات

اختبار الفرضيات المتعلق بالفرق وسطين:

نظرية (٣): إذا أخذت عينة عشوائية حجمها n_1 من مجتمع $N(M_1 ، \text{س}_1^2)$ وأخذت عينة عشوائية أخرى حجمها n_2 من مجتمع طبيعي $N(M_2 ، \text{س}_2^2)$ بحيث كانت مستقلة عن الأولى ، وكان س_1^2 ، س_2^2 معلومتين ، فإن احصاء الاختبار للفرضية $H_0 : M_1 = M_2$ هي :

$$Z = \frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\frac{\text{س}_1^2}{n_1}+\frac{\text{س}_2^2}{n_2}}}$$

تخضع للتوزيع الطبيعي المعياري ، حيث $\bar{X}$ ، $\bar{Y}$ هما وسطا العينتين على التوالي.

(نلاحظ أن خطوات الاختبار في هذه الحالة هي نفس خطوات الاختبار التي تم عرضها في نظرية (١)).

خطوات الاختبار:

١- $H_0 : M_1 = M_2$

٢- أ- $H_1 : M_1 \neq M_2$

ب- $H_1 : M_1 > M_2$

ج- $H_1 : M_1 < M_2$

٣- دالة الاختبار: $Z = \frac{\bar{X}-\bar{\ }}{\sqrt{\frac{\text{س}_1^2}{n_1}+\frac{\text{س}_2^2}{n_2}}}$

٤- على مستوى الدلالة $\propto$

٥- أرفض H_0 إذا كان:

أ- $Z > Z_{1-\propto/2}$

$Z < Z_{\propto/2}$

ب- $Z > Z_{1-\propto}$

ج- $Z < Z_{\propto}$

مثال: أخذت عينتان مستقلتان حجمهما ٧٢ ، ٢٧ على التوالي من المجتمعين $N(M_1 , 144)$ ، $N(M_2 , 81)$ فاعطتا الوسطين $\bar{X} = 73$ ، $\bar{Y} = 69$ ، اختبر الفرضية $H_0 : M_1 = M_2$ على مستوى الدلالة $\propto = 0.05$

الحل: $Z = \frac{73-69}{\sqrt{\frac{144}{72}+\frac{81}{27}}} = \frac{4}{2.236} = 1.79$

قيمة اختبار الدلالة

$Z_{1-\propto} = Z_{1-0.05} = Z_{0.95}$

من جدول التوزيع الطبيعي ، نجد أن:

$Z_{0.95} = 1.645$

$Z > Z_{0.95}$

$1.79 > 1.645$

نرفض H_0 وندعم H_1

***

اختبار الفرضيات المتعلقة بالنسبة:

إن اختبار الفرضيات المتعلقة بالنسبة يشبه اختبار الفرضيات المتعلق بالوسط الحسابي لمجتمع حيث يتغير فقط طريقة إيجاد دالة الاختبار في هذه الحالة

نظرية (٤): إذا أخذت عينة عشوائية حجمها n من توزيع ذات الحدين (مجتمع برنولي) $b: (I , P)$ بحيث كان $\bar{P}$ هي نسبة النحاج في العينة فإن

دالة الاختبار: $Z = \frac{\bar{P}-P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}}$

تخضع لتوزيع طبيعي معياري بشرط أن تكون n كبيرة $(n \geq 30)$ ، حيث p_0 : هي نسبة النجاح للمجتمع، $\bar{P}$: هي نسبة النجاح للعينة.

أما خطوات الاختبار هي كالآتي:

١- الفرضية الصغيرة $H_0 : P = P_0$

٢- الفرضية الطويلة: أ- $H_1 : P \neq P_0$

ب- $H_1 : P > P_0$

ج- $H_1 : P < P_0$

٣- مستوى الدالة $\propto$

٤- إحصاء الاختبار: $Z = \frac{\bar{P}-\ _0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}}$

٥- نرفض H_0 إذا كان: أ- $Z > Z_{1-\propto/2}$

$Z < Z\propto_{/2}$

ب- $Z > Z_{1\text{-}\propto}$

ج- $Z < Z\propto$

مثال: من المعلوم أن نسبة مستخدمي حزام الأمان في السيارات (قبل تشريع التزام الاستعمال) هي ٠,٨ درست عينة عشوائية حجمها ٢٠٠ سائق بعد صدور التشريع الإلزامي، فوجد أن ١٧٠ سائق يستعملون الحزام. اختبر الفرضية ما إذا كان التشريع قد زاد نسبة المستخدمين لحزام الأمان على مستوى الدلالة $\propto = 0.10$ **؟**

الحل: $H_0 : P = 0.8$

$H_1 : P > 0.8$

على مستوى الدلالة $\propto = 0.10$ ؟

نلاحظ أن $0.85 = \frac{17}{20} = \frac{170}{200} = \bar{\ }$

ثم نجد دالة الاختبار: $Z = \frac{\overline{P} - P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0}{n}}}$

$= \frac{0.85 - 0.8}{\sqrt{\frac{0.8(1-0.8)}{200}}}$

$Z > Z_{1\text{-}\propto}$

$1.8 > Z_{0.90} \rightarrow 1.8 > 1.28$

النتيجة: المتباينة صحيحة ، نرفض H_0 وندعم H_1 (القرار التزام السائقين باستخدام حزام الأمان قد رفع من نسبة السائقين الذين يلتزمون باستخدامه).

المحاضرة الواحد والعشرون

الفصل السادس : اختبار الفرضيات

اختبار الفرضيات المتعلق بالفرق وسطين:

نظرية (٥): إذا أخذت عينة عشوائية حجمها n_1 من مجتمع برنولي $b: (I , P)$ وأخذت عينة عشوائية أخرى حجمها n_2 مستقلة عن الأولى من مجتمع برنولي $b: (I , P)$ فإن إحصاء الفرضية $H_0 : P_1 = P_2$ هو: $Z = \frac{\overline{P}_1 - \overline{P}_2}{\sqrt{\frac{\overline{P}(1-\overline{P})}{n_1}+\frac{\overline{P}(1-\overline{P})}{n_2}}}$

تخضع للتوزيع الطبيعي المعياري تقريباً بشرط أن تكون n_1 , n_2 كبيرتين.

حيث... $\overline{P}_1$: نسبة النجاح للعينة الأولى.

$\overline{P}_2$: نسبة النجاح للعينة الثانية.

ولحساب $\overline{P}$ (النسبة المشتركة بين العينتين) ، يمكن استخدام الصيغة: $\overline{P} = \frac{n_1\overline{P}_1+n_2\overline{P}_2}{n_1+n_2}$

ولإجراء الاختبار للفرضية المبدئية، فإننا نتبع الخطوات السابقة من النظرية (٤) مع أخذ بعين الاعتبار إحصاء الاختبار من نظرية (٥).

مثال: للمقارنة بين نسبة المدخنين في الفئة العمرية (٢٥ – ١٨) سنة مع الفئة العمرية (٣٠ – ٢٦) سنة، أخذت عينة عشوائية حجمها ٢٠٠ شخص من الفئة الأولى ووجد أن ٨٠ شخص منهم يدخنون، أخذت عينة عشوائية حجمها ١٠٠ شخص ووجد أن ٥٢ شخص منهم يدخنون.

أختبر الفرضية $H_0 : P_1 = P_2$

مقابل $H_1 : P_1 < P_2$ على مستوى الدلالة $\propto = 0.05$

الحل: ١- $H_0 : P_1 = P_2$

٢- $H_1 : P_1 < P_2$

٣- مستوى الدلالة $\propto = 0.05$

٤- إحصاء الاختبار: $Z = \frac{\overline{P}_1 - \overline{P}_2}{\sqrt{\frac{\overline{P}(1-\overline{P})}{n_1}+\frac{\overline{P}(1-\overline{P})}{n_2}}}$

$Z < Z\propto$

$.. \overline{P} = \frac{n_1\overline{P}_1+n_2\overline{P}_2}{n_1+n_2}$

$= \frac{200(\frac{80}{200})+100(\frac{52}{100})}{200+100} = \frac{132}{300} = 0.44$

$Z = \frac{\frac{80}{200} - \frac{52}{100}}{\sqrt{\frac{0.44(1-0.44)}{200}+\frac{0.44(1-0.44}{100}}} = -1967$

ولإيجاد قيمة $Z\propto \leftarrow Z_{0.05} = -1.645$

$-1.967 < -1.645$

صحيحة وبذلك نهمل H_0 وندعم H_1

الواجب الاول

سؤال ١ : إذا كان P(A)= 0.5, P(B)=0.4 وكان A,B حادثين منفصلين فإن احتمال=P(AUB)

0.9
0.4
0.5
0.7

سؤال ٢ : إذا كان التباين للمتغير العشوائي X يساوي ٣ وكان لدينا الخطي Y= -x +5 فإن تباين المتغير العشوائي Y يساوي

3-
2
8
3

سؤال ٣ : ما عدد تباديل احرف كلمة"SUCCESS " ؟

5040
840
420
2520

سؤال ٤: إذا كان احتمال نجاح طالب في مقرر الاحصاء هو ٠,٨ واحتمال نجاحه في مقرر المحاسبة هو ٠,٧ واحتمال نجاحة في كلا المقررين هو ٠,٦ فإن احتمال نجاحه في الاحصاء ورسوبه في المحاسبه هو :

0.1
0.2
0.4
0.3

سؤال ٥: إذا كان احتمال نجاح طالب في مقرر الاحصاء هو ٠,٨ واحتمال نجاحه في مقرر المحاسبة هو ٠,٧ واحتمال نجاحة في كلا المقررين هو ٠,٦ فإن احتمال نجاحه في المحاسبة ورسوبه في الاحصاء هو :

0.1
0.2
0.4
0.3

سؤال ٦ : إذا كان المتغير العشوائي X برمز لظهور أوجه متشابهة في تجربة القاء قطعة نقد متزنة ثلاث مرات ,فإن احتمال X يساوي

1/4
1/2
1/3
1/8

سؤال ٧ :إذا كان المتغير العشوائي x ويرمز لظهور اوجه متشابهة في تجربة إلقاء قطعة نقد منتظمة مرتين، فإن احتمال ذلك المتغير يساوي

1/4
1/2
1/3
1/8

سؤال ٨: إذا كان التوقع الرياضي للمتغير العشوائي x يساوي ٣ وكان لدينا التحويل الخطي y= -2 x + 3 فإن التوقع الرياضي للمتغير العشوائي y يساوي

6-
3
3-
6

سؤال ٩ : إذا كان P(A) = P(A/B)=0.5, P(B) =0.2 فإن P(B/A) يساوي:

0.3
0.5
0.4
0.2

سؤال ١٠ : إذا كان P(A)=0.4, P(b)=0.6, P(AUB)=1 فإن احتمال التقاطع للحادثين A,B يساوي

1
0.6
0
0.4

سؤال ١١ : ان عدد طرق اختيار طالبين من بين خمسة طلاب للذهاب في رحلة مدرسية يساوي:

30
10
5
20
سؤال ١٢ : ان عدد طرق اختيار ٣ طلاب من بين خمسة طلاب للذهاب في رحلة مدرسية يساوي:
30
10
5
20
سؤال ١٣ : إذا كان $p(a) = 0.5, p(b) = p(b/a) = 0.4$ فإن: $p(a/b) =$
0
0.2
0.4
0.5

الواجب الثاني

سؤال ١: إذا كان معدل المواليد في احد المستشفيات هو ٥ اطفال في اليوم الواحد، فإن احتمال ولادة ٣ اطفال في احد الأيام هو
0
0.28
0.14
0.84
سؤال ٢ :إن القيمة المعيارية المقابلة للمتغير العشوائي $X=10$ والذي ينتمي للتوزيع الطبيعي $X:N(5;100)$ تساوي
10
0.5
2
1
سؤال ٣ : إن قيمة التباين في التوزريع الطبيعي المعياري يساوي
1
0
10
0.5
سؤال ٤ : إن قيمة المساحة λ في التوزيع $t[\lambda; 5] = 2.015$ يساوي
0.10
0.90
0.05
0.95
سؤال ٥ :إذا كان X متغير عشوائي يتبع توزيع ذات الحدين بحيث كان $P=0.6, n=10$ فإن التوقع الرياضي للمتغير X يساوي
0.6
6
0.24
2.4
سؤال ٦ : إن قيمة F في المقدار $F[0.05;5,6]$ تساوي
4.95
0.20
4.39
0.23
سؤال ٧ : إذا كان X متغير عشوائي يتبع توزيع ذات الحدين بحيث كان $P=0.6, n=10$ فإن تباين X يساوي
0.6
0.24
6
2.4

الواجب الثالث

السؤال ١ : عينة عشوائية حجمها ١٦ اخذت من مجتمع طبيعي انحرافه المعياري ١٢ بحيث اعطت معدل ٣٠، فإن فترة ٩٠% ثقة للوسط الحسابي للمجتمع هي:
(24.24, 35.76)
(24.08, 31.92)
(25.24, 30.76)
(25.08, 34.92)

طريقة الحل: نلاحظ أن الانحراف المعياري المعطى يعود للعينة، وبذلك فإن التوزيع المستخدم هو توزيع t ومن نظرية (٣) نجد أن:

$$(\overline{X} - t\left[1 - \frac{\propto}{2}, n-1\right]\frac{s}{\sqrt{n}}, \overline{X} + t\left[a - \frac{\propto}{2}, n-1\right]\frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$(30 - t[0.95,15]\frac{12}{\sqrt{16n}}, 30 + t[0.95,15]\frac{12}{\sqrt{16n}}$$

$$(30 - 1.753 \times \frac{12}{4}, 30 + 1.753 \times \frac{12}{4})$$

(24.74 , 35.26)

السؤال ٢ : اخذت عينة عشوائية قيمها ٣، ٥، ٥، ٧ من مجتمع طبيعي، فإن معدل المجتمع تقديرا يساوي

5

4

7

3

طريقة الحل: من خلال التقدير النقطي، نلاحظ أن معدل المجتمع = معدل العينة

وبذلك نجد معدل العينة للقيم المعطاه: $\overline{X} = \frac{7+5+5+3}{4} = \frac{20}{4} = 5$ وبذلك M = 5

السؤال ٣ : إذا علمت أن عينة حجمها ١٠ مسحوبة من مجتمع لانهائي معدله ٩ وتباينها ٢، فإن الوسط الحسابي للعينة (التوقع الرياضي) يساوي

10

2

3

9

(لاحظ أن الوسط الحسابي للمجتمع = الوسط الحسابي للعينة)

السؤال ٤ : عينة عشوائية حجمها ٢٥ تخضع لتوزيع طبيعي وسطه ١٥ وانحراف معياري يساوي٥، فإن احتمال ان يقل الوسط الحسابي للعينة عن ١٧ هو

0.0225

0.0183

0.9772

0.9817

طريقة الحل: لاحظ أن تباين (الانحراف المعياري) للمجتمع معطى، والمطلوب ايجاد $P(\overline{X} < 17)$ ← من توزيعات المعاينة

يجب تحويل قيمة $\overline{X}$ إلى Z من خلال صيغة القانون: $Z = \frac{\overline{X}-M}{س/\sqrt{n}} = \frac{17-15}{5/\sqrt{25}} = \frac{2}{1} = 1$

من جدول التوزيع الطبيعي المعياري → $P(\overline{X} < 17) = P(Z < 2) = 0.9772$

السؤال ٥ : سحبت عينة عشوائية من مجتمع لا نهائي معدله ١٠٠ وتباينه ٤٠، اذا كان حجم العينة يساوي ١٠ فإن الانحراف المعياري للعينة يساوي

10

2

4

0

طريقة الحل: $4 = \frac{40}{10} = \frac{س^2}{n} = س_{\overline{X}}$

(الانحراف المعياري = الجذر التربيعي للتباين)

$س_{\overline{X}} = \sqrt{4} = 2$

(النظرية الأولى من توزيعات المعاينة)

الواجب الرابع

السؤال ١ : عينة عشوائية حجمها ١٥ اخذت من مجتمع طبيعي بحيث اعطت تباين = ١٠، فإن فترة ٩٨% ثقة لتباين المجتمع هي:

(5.13, 21.56)

(5.80, 31.04)

(4.80, 30,04)

(3.80, 29.04)

طريقة الحل: بتطبيق صيغة القانون من النظرية (٧) والخاصة بفترات ثقة لتباين مجتمع واحد:

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{X^2\,[1-\propto/2\,;n-1}, \frac{(n-1)S^2}{X^2\,[\propto/2\,;n-1}\right)$$

$$\left(\frac{14\times10}{X^2\,[0.99\,;\,14}, \frac{14\times10}{X^2\,[0.01\,;\,14}\right)$$

$$\left(\frac{140}{29.141}, \frac{140}{4.88}\right)$$

(4.80 , 30.04)

السؤال ٢ : إذا كان لدينا عينة عشوائية حجمها ٩ من مجتمع طبيعي تباينها = ٥، وعينة عشوائية اخرى مستقلة عن الاولى حجمها = ١١ وتباينها = ٤. فإن فترة ٩٠% ثقة للنسبة (تباين المجتمع الثاني)/ (تباين المجتمع الاول) تساوي

(0.25, 2.75)

(0.21, 2.55)

(0.24, 2.61)

(0.24, 2.46)

طريقة الحل: لاحظ انه في حال السؤال عن النسبة بين تباين مجموعتين فإن هذا التوزيع يتبع توزيه F ، وبتطبيق صيغة القانون:

$$(\frac{S_2^2}{S_1^2} F [\propto/2 ; n_1 - 1 , n_2 - 1] , \frac{S_2^2}{S_1^2} F [1 - \propto/2 ; n_1 - 1 , n_2 - 1]$$

ينتج أن: $(\frac{4}{5} F [0.05 ; 8 , 10] , \frac{4}{5} F [0.95 ; 8 , 10]]$

$$(\frac{4}{5} \times \frac{1}{3.35} , \frac{4}{5} \times \frac{1}{3.35})$$

(0.24 , 2.456)

السؤال ٣ : إذا اخذت عينة عشوائية حجمها ٤٠ طالب من احد المدارس الابتدائية، ووجد أن ١٠ طلاب يلبسون نظارات طبية، فإن نسبة النجاح هي:

0.2

0.75

0.5

0.25

طريقة الحل: لاحظ أن نسبة النجاح $\overline{P}$ تساوي: $P = \frac{X}{n} = \frac{\text{عدد النجاحات}}{\text{حجم العينة}} = \frac{10}{40} = \frac{1}{4} = 0.25$

السؤال ٤ : إذا اخذت عينة عشوائية حجمها ٩ من توزيع طبيعي بحيث اعطت وسط حسابي = ٨ وانحراف معياري =٢. فإن فترة ٩٠% ثقة للوسط الحسابي للمجتمع هي

(6.75, 9.34)

(6.91, 9.09)

(6.57, 9.43)

(6.76, 9.24)

طريقة الحل: لاحظ أن تباين المجتمع أو النحراف المعياري له غير معلوم وبذلك فإننا نستخدم توزيع t لإيجاد فترة الثقة وبتطبيق صيغة القانون من نظرية (٣) نحصل على: $(\overline{X} - t\left[1 - \frac{\propto}{2}, n-1\right]\frac{s}{\sqrt{n}} , \overline{X} + t[a - \frac{\propto}{2}, n-1]\frac{s}{\sqrt{n}}$

$$(8 - t[0.95,8]\frac{2}{\sqrt{9}} , 8 + t[0.95,8]\frac{2}{\sqrt{9}}$$

$$(8 - 1.86 \times \frac{2}{3} \; ; \; 8 + 1.86 \; \times \frac{2}{3})$$

(6.76 , 9.24)

السؤال ٥: إذا كان عدد الطلاب الذين يلبسون نظارات طبية من بين ٤٠ طالبا هو ١٠ ، فإن فترة ٩٠% ثقة لنسبة نجاح الطلاب الذين يلبسون نظارات هي:

(0.14, 0.36)

(0.20, 0.30)

(0.17, 0.28)

(0.11, 0.38)

طريقة الحل: لاحظ ان التقدير هنا هو التقدير بنسبة النجاح ، ويجب أولا إيجاد نسبة النجاح للعينة حيث $P = \frac{X}{n} = \frac{10}{40} = \frac{1}{4} = 0.25$

وبتطبيق قانون النظرية الخامسة من وحدة التقدير: $(\overline{P} - Z_{1-\propto/2}\sqrt{\frac{\overline{P}(1-\overline{P})}{n}} , (\overline{P} - Z_{1-\propto/2}\sqrt{\frac{\overline{P}(1-\overline{P})}{n}})$

$$(0.25 - Z_{0.95}\sqrt{\frac{0.25(0.75)}{40}} , 0.25 + Z_{0.95}\sqrt{\frac{0.25(0.75)}{40}})$$

(0.14 , 0.36)

الاختبار الفصلي

السؤال ١ : إذا كان X متغير عشوائي يتبع توزيع ذات الحدين بحيث كان P=0.6, n= 10 فإن احتمال الفشل يساوي

0.5

0.4

0,24

0.04

طريقة الحل: لاحظ أن P=0.6 هو احتمال النجاح وبذلك فإن احتمال الفشل $q = 1 – p = 1 – 0.6 = 0.4$

السؤال ٢ : إذا كان معدل النجاحات في تجارب بواسون هو ١٠، فإن التوقع الرياضي للمتغير العشوائي X الذي يتبع هذا التوزيع يساوي

10

1

0

5

طريقة الحل: $E(X) = \lambda = 10$

السؤال ٣ : إذا كان Z ينتمي الى التوزيع الطبيعي المعياري فإن P(Z>2) يساوي

0.9817

0.0183

0.9772

0.0228

طريقة الحل: $P(Z > 2) = 1 – P(Z < 2)$

$= 1 – 0.9772 = 0.0228$

السؤال ٤ : إن القيمة المعيارية المقابلة للمتغير العشوائي X=5 والذي ينتمي للتوزيع الطبيعي X:N(5;100)تساوي

10

2

0

1

طريقة الحل: نحول X إلى Z حسب الصيغة $Z = \frac{X=M}{س} = \frac{5-5}{10} = \frac{0}{10} = 0$

السؤال ٥ : من خصائص منحنى التوزيع الطبيعي

شكله يشبه الجرس

المساحة اسفل المنحنى تساوي ١

يتقارب طرفيه من الصفر عندما تقترب X من موجب وسالب مالا نهاية

جميع ما ذكر صحيح

السؤال ٦ : إذا كان P(A)= 0.5, P(B)=0.4 وكان A,B حادثين مستقلين فإن احتمال=P(AUB)

0.5

0.7

0.9

0.4

طريقة الحل: $P(A\cup B) = P(A) + P(B) – P(A\cap B)$

$= P(A) + P(B) – P(A) \times P(B)$

$= 0.5 + 0.4 – (0.5 \times 0.4) = 0.7$

السؤال ٧ : إذا كان احتمال نجاح طالب في مقرر الاحصاء هو ٠,٨ واحتمال نجاحه في مقرر المحاسبة هو ٠,٧ واحتمال نجاحة في كلا المقررين هو ٠,٦ فإن احتمال رسوبه في مقرر الاحصاء هو

0.1

0.4

0.2

0.3

طريقة الحل: نرمز لنجاح الطالب في مقرر الإحصاء بالرمز $P(\overline{A}) = 0.8$ .. $P(\overline{A}) = 1 – P(A) = 1 – 0.8 = 0.2$

السؤال ٨ : إذا كان X متغير عشوائي يتبع توزيع ذات الحدين بحيث كان P=0.8, n= 3 فإن احتمال X=0 يساوي

0.8

0.08

0.512

0.008

طريقة الحل: من خلال استخدام صيغة القانون لتوزيع ذات الحدين نجد أن:

$P(X = 0) = nCx * P^{x} * (1 – P)^{n-x}$

$3C0 * (0.8)^{0} * (0.2)^{3}$

$0.008 = 1 * 1 * 0.008$

السؤال ٩ : إن قيمة الوسط الحسابي في التوزيع الطبيعي المعياري يساوي

0.5
0
1
0.1
(دائماً = ٠ ، أما التباين = ١ = الانحراف المعياري)
السؤال ١٠ : في التوزيع الاحتمالي المنفصل، إن مجموع الاحتمالات لجميع المتغيرات العشوائية التي تنتمي لذلك التوزيع تساوي
0
اكبر من صفر
اقل من واحد
1
(وهذا يعتبر من شروط التوزيع الاحتمالي المنفصل – مجموع الاحتمالات = ١)
السؤال ١١ : إذا كان P=0.2, n=5, في توزيع ذات الحدين، فإن تباين X الذي يتبع هذا التوزيع يساوي
1
5
0.8
0.5
طريقة الحل: $س_x^2 = npq = 5(0.2)(0.8) = 0.8$
سؤال ١٢ : إذا كان P(A)=0.1, P(B)= 0.4, وكان A, B حادثين مستقلين فإن احتمال تقاطعهما يساوي
0.04
0.1
0
0.4
طريقة الحل: P(A∩B) = P(A) × P(B) | = 0.1 × 0.4 = 0.04
السؤال ١٣ : ان عدد طرق اختيار خمسة طلاب من بين خمسة طلاب للذهاب في رحلة مدرسية يساوي
2
10
1
5
طريقة الحل: $5C5 = \frac{5!}{(5-5)!*5!} = 1$
السؤال ١٤ : إن تباديل حرفين من كلمة "نجاح" هو
1
12
6
24
طريقة الحل: $4P2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4\times3\times2}{2} = 12$
السؤال ١٥ : من مسلمات الاحتمال
احتمال أي حادث اكبر من صفر
احتمال أي حادث اقل من ١
احتمال اي حادث اكبر من أو يساوي صفر واقل من أو يساوي ١
احتمال أي حادث = ١
السؤال ١٦ : إذا كان المتغير العشوائي X برمز لظهور عددين مختلفين في تجربة القاء جحري نرد، فإن احتمال X يساوي
1/6
1/3
1/4
5/6
السؤال ١٧ : إن قيمة كاي تربيع التي تقع على يسارها المساحة ٠،٩٩ بدرجات حرية ٢ تساوي
9.210
7.824
6.635
13.815
(من جدول توزيع كاي تربيع نجد أن قيمة كاي = ٩,٢١٠)
السؤال ١٨ : إذا كان P(A)=0.7, P(B)=0.6, P(AUB)=0.8 فإن احتمال حدوث A وعدم حدوث B يساوي
0.2
0.5
0.3
0.4

طريقة الحل: $P(A\cap \overline{B}) = P(A) - P(A\cap B)$
$= 0.7 - (P(A) + P(B) - P(A\cup B))$
$= 0.7 - (0.7 + 0.6 - 0.8)$
$= 0.7 - 1.3 - 0.8$
$0.2 = 0.7 - 0.5$

السؤال ١٩ : إن قيمة F في المقدار F[0.95;5,6] تساوي
0.23
0.20
4.39
4.95
(من جدول توزيع F نجد أن القيمة هي ٤,٣٩)

السؤال ٢٠ : إذا كان P(A)=0.5, P(B) =0.2 وكان A و B حادثين منفصلين فإن احتمال تقاطعهما يساوي
0.5
صفر
1
0.2

السؤال ٢١ : إذا كان التباين للمتغير العشوائي X يساوي ٤ وكان لدينا الخطي Y= -x +5 فإن الانحراف المعياري للمتغير العشوائي Y يساوي
4
2
4-
2-
طريقة الحل: لاحظ أن الانحراف المعياري للمتغير $X = \sqrt{4} = 2$
ومن خصائص الانحراف المعياري تحت أي تحويل خطي هو: $2 = 2 \times |-1| = |a|$س$_X$ = س$_Y$

السؤال ٢٢ : إذا كان معدل المواليد في احد المستشفيات هو ٥ اطفال في اليوم الواحد، فإن احتمال ولادة ٣ اطفال في احد الأيام هو
0.28
0.14
0
0.84
طريقة الحل: توزيع بواسون $P(X = 3) = \frac{e^{-5}\times 5^3}{3!} = 0.14$

السؤال ٢٣ : إذا كان S هو الفضاء العيني لتجربة عشوائية، فإن احتمال S يساوي
صفر
اكبر من ٠ واقل من واحد
0.5
1
(دائماً $P(S) = 1$)

السؤال ٢٤ : إن قيمة المساحة λ في التوزيع t[λ; 5] = - 2.015 يساوي
0.05
0.95
0.10
0.90

السؤال ٢٥ : إن عدد عناصر الفضاء العيني في تجربة القاء قطعة نقد ثلاث مرات يساوي
8
6
4
9
طريقة الحل: هو عبارة عن ٢ × ٢ × ٢ = ٨ عناصر

تمارين على الفصل السادس:

سؤال: تخضع درجات الطلاب في مقرر الإحصاء لتوزيع طبيعي انحرافه المعياري ١٠ درجات ومعدله M. اختبر الفرضية $H_0: M = 70$ مقابل الفرضية $H_1: M < 70$ على مستوى الدلالة $\alpha = 0.05$ إذا علمت أن الوسط الحسابي لعينة من الطلاب حجمها ١٦ اعطت وسطاً مقداره ٦٥ درجة.

طريقة الحل: ١- نحدد دالة الاختبار: $Z = \frac{\overline{X}-M_0}{\text{س}/\sqrt{n}} = \frac{65-70}{10/4} = \frac{-5}{2.5} = -2$
٢- نجري عملية المقارنة من خلال الحالة الثالثة: $Z < Z_\alpha = -Z_{1-\alpha}$
$-2 < -Z_{0.95}$
$-2 < -1.64$ المتباينة صيحة، نرفض H_0 وندعم H_1